

# Logik für Informatiker

## 2. Aussagenlogik

### Teil 8

3.06.2014

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: [sofronie@uni-koblenz.de](mailto:sofronie@uni-koblenz.de)

# Bis jetzt

---

- Normalformen: CNF/DNF
- Subsumption
- SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)
  - SAT;  $k$ -SAT
  - 3-SAT vs. SAT (NP-complete)
  - 2-SAT: PTIME
  - Horn-Formeln (Erfüllbarkeitstest) PTIME
- Der aussagenlogische Resolutionkalkül
- Semantische Tableaux

# Der aussagenlogische Tableaukalkül

---

## Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Beweis durch Fallunterscheidung
- Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

## Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

## Nachteile

- Mehr als eine Regel

# Formeltypen

---

## Konjunktive Formeln: Typ $\alpha$

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

## Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
$F \wedge G$	$F$	$G$
$\neg(F \vee G)$	$\neg F$	$\neg G$
$\neg(F \rightarrow G)$	$F$	$\neg G$
$\neg\neg F$	$F$	

# Formeltypen

---

## Disjunktive Formeln: Typ $\beta$

- $\neg(F \wedge G)$
- $F \vee G$
- $F \rightarrow G$

## Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$
$\neg(F \wedge G)$	$\neg F$	$\neg G$
$F \vee G$	$F$	$G$
$F \rightarrow G$	$\neg F$	$G$

# Regeln des (aussagenlogischen) Tableauealküls

---

$\alpha$		$p \wedge q$
<hr/>		
$\alpha_1$	Konjunktiv	$p$
$\alpha_2$		$q$
$\beta$		$p \vee q$
<hr/>		/ \
$\beta_1$   $\beta_2$	Disjunktiv	$p$ $q$
$\phi$		$\phi$
$\neg\phi$	Widerspruch	$\neg\phi$
<hr/>		
$\perp$		$\perp$

# Instanzen der $\alpha$ und $\beta$ -Regel

---

## Instanzen der $\alpha$ -Regel

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

$$Q$$

$$\frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P}$$

$$\neg Q$$

$$\frac{\neg(P \rightarrow Q)}{P}$$

$$\neg Q$$

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

## Instanzen der $\beta$ -Regel

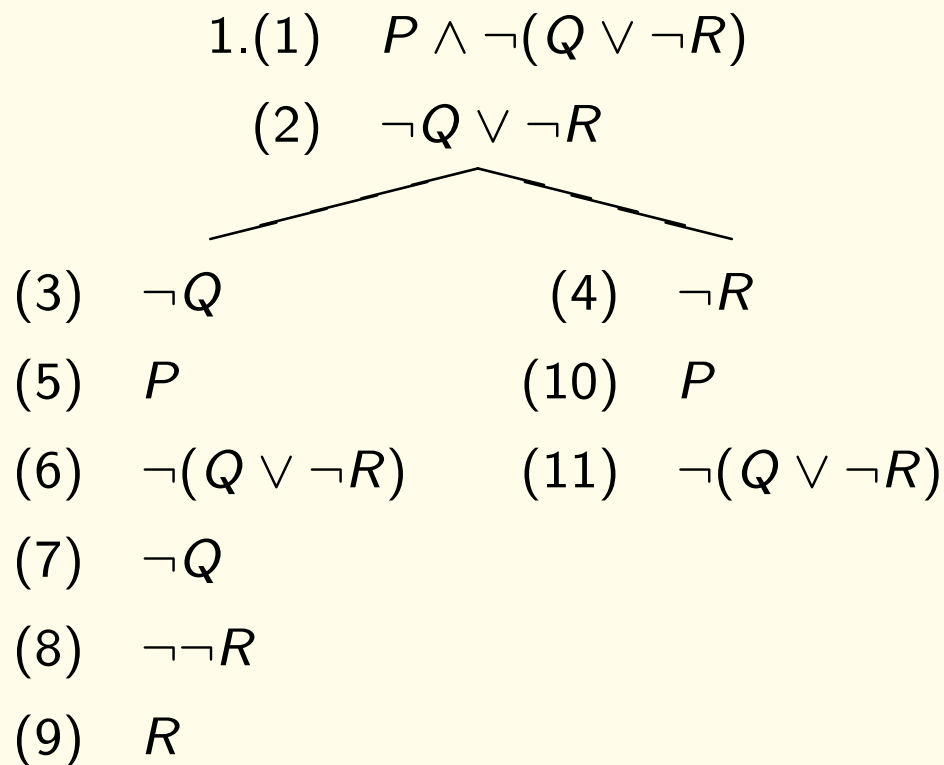
$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q}$$

$$\frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q}$$

$$\frac{P \rightarrow Q}{\neg P \mid Q}$$

# Ein Tableau für $\{P \wedge \neg(Q \vee \neg R), \neg Q \vee \neg R\}$

---



Dieses Tableau ist nicht “maximal”, aber der erste “Ast” ist.

Dieser Ast ist nicht “geschlossen” (enthält keinen Widerspruch), also ist die Menge  $\{1, 2\}$  erfüllbar.

(Diese Begriffe werden auf den nächsten Seiten erklärt.)



# Determinismus von Kalkül und Regeln

---

## Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch

# Determinismus von Kalkül und Regeln

---

## Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:  
Auswahl der nächsten Formel, auf die eine Regel angewendet wird

# Determinismus von Kalkül und Regeln

---

## Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:  
Auswahl der nächsten Formel, auf die eine Regel angewendet wird

## Heuristik

- Nicht-verzweigende Regeln zuerst:  $\alpha$  vor  $\beta$

# Determinismus von Kalkül und Regeln

---

## Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:  
Auswahl der nächsten Formel, auf die eine Regel angewendet wird

## Heuristik

- Nicht-verzweigende Regeln zuerst:  $\alpha$  vor  $\beta$

## Nota bene:

Dieselbe Formel kann mehrfach (auf verschiedenen Ästen) verwendet werden

# Formale Definition des Kalküls

---

## Definition

**Tableau:** Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

# Formale Definition des Kalküls

---

## Definition

**Tableau:** Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

## Definition

**Tableauast:** Maximaler Pfad in einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

# Formale Definition des Kalküls

---

Sei  $M$  eine Formelmeng

## Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für  $M$

# Formale Definition des Kalküls

---

Sei  $M$  eine Formelmenge

## Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für  $M$

## Erweiterung

- $T$  ein Tableau für  $M$
- $B$  ein Ast von  $T$
- $F$  eine Formel auf  $B$  oder in  $M$ , die kein Literal ist



# Formale Definition des Kalküls

---

Sei  $M$  eine Formelmeng

## Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für  $M$

## Erweiterung

- $T$  ein Tableau für  $M$
- $B$  ein Ast von  $T$
- $F$  eine Formel auf  $B$  oder in  $M$ , die kein Literal ist

$T'$  entstehe durch Erweiterung von  $B$  gemäß der auf  $F$  anwendbaren Regel ( $\alpha$  oder  $\beta$ )

# Formale Definition des Kalküls

---

Sei  $M$  eine Formelmenge

## Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für  $M$

## Erweiterung

- $T$  ein Tableau für  $M$
- $B$  ein Ast von  $T$
- $F$  eine Formel auf  $B$  oder in  $M$ , die kein Literal ist

$T'$  entstehe durch Erweiterung von  $B$  gemäß der auf  $F$  anwendbaren Regel ( $\alpha$  oder  $\beta$ )

Dann ist  $T'$  ein Tableau für  $M$ .

# Formale Definition des Kalküls

---

## **Nota bene:**

Alle Äste in einem Tableau für  $M$  enthalten implizit alle Formeln in  $M$

# Formale Definition des Kalküls

---

## Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für  $M$  enthalten implizit alle Formeln in  $M$

## Definition.

Ast  $B$  eines Tableaus für  $M$  ist **geschlossen**, wenn es eine Formel  $F$  existiert, so dass  $B$  die Formeln  $F$  und  $\neg F$  enthält.

# Formale Definition des Kalküls

---

## Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für  $M$  enthalten implizit alle Formeln in  $M$

## Definition.

Ast  $B$  eines Tableaus für  $M$  ist **geschlossen**, wenn es eine Formel  $F$  existiert, so dass  $B$  die Formeln  $F$  und  $\neg F$  enthält.

## Definition.

Ein Tableau ist **geschlossen**, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist.

# Formale Definition des Kalküls

---

## Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für  $M$  enthalten implizit alle Formeln in  $M$

## Definition.

Ast  $B$  eines Tableaus für  $M$  ist **geschlossen**, wenn es eine Formel  $F$  existiert, so dass  $B$  die Formeln  $F$  und  $\neg F$  enthält.

## Definition.

Ein Tableau ist **geschlossen**, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist.

## Definition.

Ein Tableau für  $M$ , das geschlossen ist, ist ein Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von)  $M$

# Beispiel

---

Zu zeigen:

$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))$  allgemeingültig

# Beispiel

---

Zu zeigen:

$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))$  allgemeingültig

Wir zeigen, dass

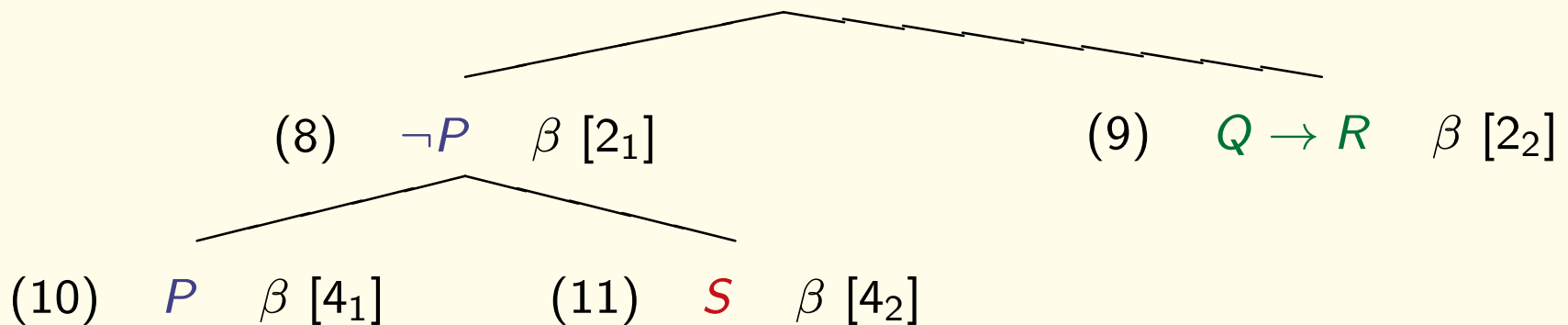
$\neg[(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))]$

unerfüllbar ist.



# Beispiel

- (1)  $\neg[(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))]$
- (2)  $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$   $\alpha [1_1]$
- (3)  $\neg((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))$   $\alpha [1_2]$
- (4)  $P \vee S$   $\alpha [3_1]$
- (5)  $\neg((Q \rightarrow R) \vee S)$   $\alpha [3_2]$
- (6)  $\neg(Q \rightarrow R)$   $\alpha [5_1]$
- (7)  $\neg S$   $\alpha [5_2]$



geschlossenes Tableau.

# Klauseltableau

---

$M$  Menge von Klauseln

# Klauseltableau

---

$M$  Menge von Klauseln

## Änderungen

- Keine  $\alpha$ -Regel
- Erweiterungsregel kann Verzweigungsgrad  $> 2$  haben
- Alle Knoten im Tableau enthalten Literale

# Klauseltableau: Beispiel

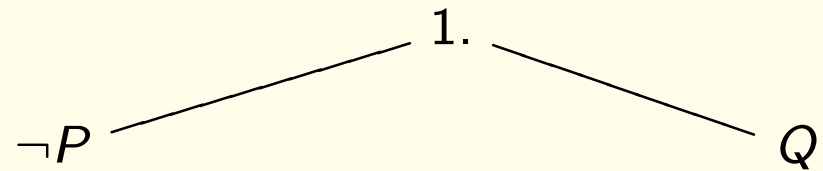
---

$$M = \{ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\} \}$$

# Klauseltableau: Beispiel

---

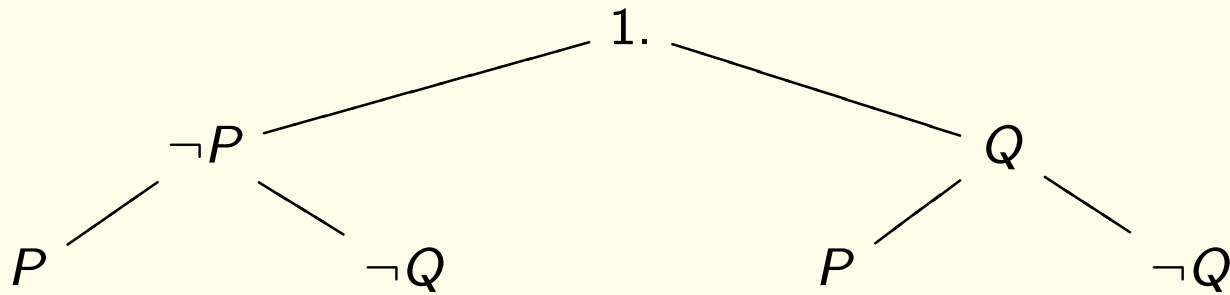
$$M = \{ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\} \}$$



# Klauseltableau: Beispiel

---

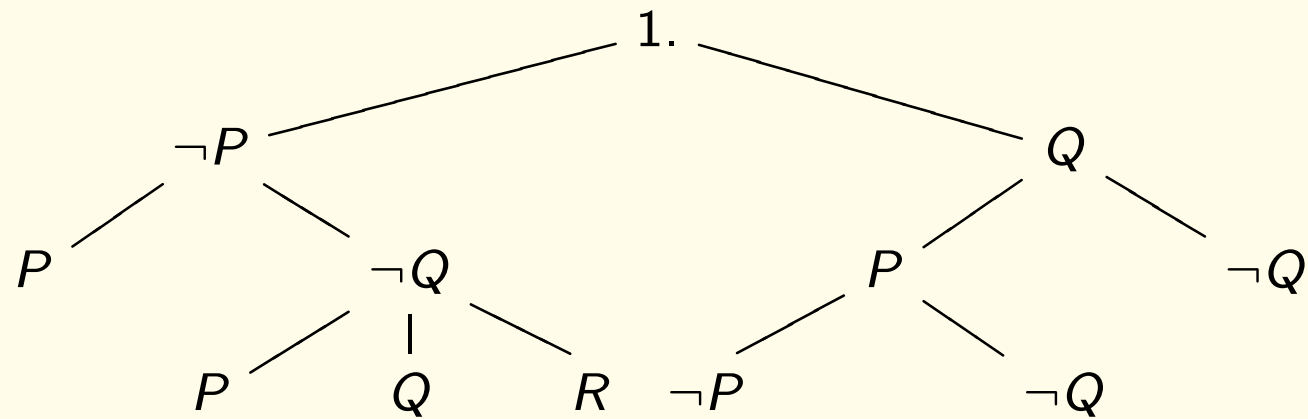
$$M = \{ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\} \}$$



# Klauseltableau: Beispiel

---

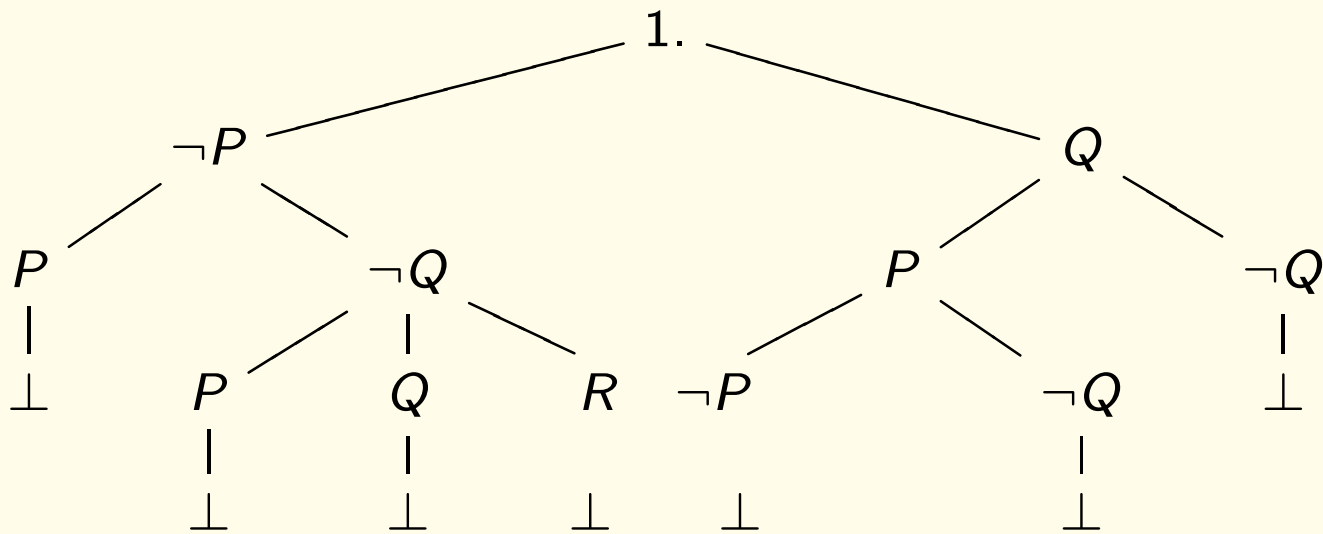
$$M = \{ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\} \}$$



# Klauseltableau: Beispiel

---

$$M = \{ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\} \}$$





# Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

---

## Theorem.

Eine Formelmenge  $M$  ist unerfüllbar  
genau dann, wenn  
es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von)  $M$  gibt

# Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

---

## Theorem.

Eine Formelmenge  $M$  ist unerfüllbar  
genau dann, wenn  
es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von)  $M$  gibt

**Korrektheit:** “ $\Leftarrow$ ”

Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von)  $M$  gibt  
(d.h. ein Tableau für  $M$ , das geschlossen ist)  
so ist  $M$  unerfüllbar.

... **alternativ:**

Falls  $M$  erfüllbar ist, hat  $M$  kein geschlossenes Tableau.

# Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

---

## Theorem.

Eine Formelmenge  $M$  ist unerfüllbar  
genau dann, wenn  
es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von)  $M$  gibt

## **Vollständigkeit:** “ $\Rightarrow$ ”

Falls  $M$  unerfüllbar ist,  
gibt es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von)  $M$   
(d.h. ein Tableau für  $M$ , das geschlossen ist).

# Kern des Korrektheitsbeweises

---

## **Theorem** (Korrektheit)

Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von)  $M$  gibt (d.h. ein Tableau für  $M$ , das geschlossen ist) so ist  $M$  unerfüllbar.

... **alternativ**: Falls  $M$  erfüllbar ist, hat  $M$  kein geschlossenes Tableau.

# Kern des Korrektheitsbeweises

---

## **Theorem** (Korrektheit)

Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von)  $M$  gibt (d.h. ein Tableau für  $M$ , das geschlossen ist) so ist  $M$  unerfüllbar.

... **alternativ**: Falls  $M$  erfüllbar ist, hat  $M$  kein geschlossenes Tableau.

## **Definition.**

Ein Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Ein Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

# Kern des Korrektheitsbeweises

---

## Theorem (Korrektheit)

Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von)  $M$  gibt (d.h. ein Tableau für  $M$ , das geschlossen ist) so ist  $M$  unerfüllbar.

... **alternativ**: Falls  $M$  erfüllbar ist, hat  $M$  kein geschlossenes Tableau.

## Definition.

Ein Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Ein Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

**Lemma 1.** Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge  $M$  ist erfüllbar

**Lemma 2.** Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

... Also: Kein geschlossenes Tableau für erfüllbare Formelmenge

# Lemma 1: Beweis

---

## Definition.

Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.

Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

**Lemma 1.** Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge  $M$  ist erfüllbar

# Lemma 1: Beweis

---

## Definition.

Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.

Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

**Lemma 1.** Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge  $M$  ist erfüllbar

**Beweis:** Induktion  $p(n)$ : Falls  $M$  erfüllbar und das Tableau  $T$  in  $n$  Schritten aus  $M$  gebildet wurde, ist  $T$  erfüllbar



# Lemma 1: Beweis

---

## Definition.

Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.

Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

**Lemma 1.** Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge  $M$  ist erfüllbar

**Beweis:** Induktion  $p(n)$ : Falls  $M$  erfüllbar und das Tableau  $T$  in  $n$  Schritten aus  $M$  gebildet wurde, ist  $T$  erfüllbar

**Induktionsbasis:**  $T$  wurde in einem Schritt gebildet.

### **Initialisierung**

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für  $M$

da  $M$  erfüllbar ist, ist ein solches Tableau erfüllbar

# Lemma 1: Beweis

---

**Definition.** Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.  
Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

**Lemma 1.** Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge  $M$  ist erfüllbar

**Beweis:** Induktion  $p(n)$ : Falls  $M$  erfüllbar und das Tableau  $T$  in  $n$  Schritten aus  $M$  gebildet wurde, ist  $T$  erfüllbar

**Induktionsschritt:** Annahme  $p(n)$  gilt. Zu zeigen:  $p(n + 1)$ .

Sei  $T$  ein in  $n + 1$  Schritten gebildetes Tableau für  $M$ .

Dann gibt es ein Tableau  $T'$  für  $M$  (in  $n$  Schritten gebildet), ein Ast  $B$  von  $T'$  und eine Formel  $F$  auf  $B$ , die kein Literal ist, so dass  $T$  durch die Erweiterung von  $B$  gemäß der auf  $F$  anwendbaren Regel ( $\alpha$  oder  $\beta$ ) entstanden ist.

Induktionsvoraussetzung:  $T'$  erfüllbar, d.h. hat (mindestens) einen erfüllbaren Ast  $B'$ .

**Fall 1:**  $B' \neq B$ . Dann ist  $B'$  auch Ast in  $T$ , d.h.  $T$  erfüllbar.

# Lemma 1: Beweis

---

**Definition.** Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.  
Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

**Lemma 1.** Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge  $M$  ist erfüllbar

**Beweis:** Induktion  $p(n)$ : Falls  $M$  erfüllbar und das Tableau  $T$  in  $n$  Schritten aus  $M$  gebildet wurde, ist  $T$  erfüllbar

**Induktionsschritt:** Annahme  $p(n)$  gilt. Zu zeigen:  $p(n + 1)$ .

Sei  $T$  ein in  $n + 1$  Schritten gebildetes Tableau für  $M$ .

Dann gibt es ein Tableau  $T'$  für  $M$  (in  $n$  Schritten gebildet), ein Ast  $B$  von  $T'$  und eine Formel  $F$  auf  $B$  oder in  $M$ , die kein Literal ist, so dass  $T$  durch die Erweiterung von  $B$  gemäß der auf  $F$  anwendbaren Regel ( $\alpha$  oder  $\beta$ ) entstanden ist.

Induktionsvoraussetzung:  $T'$  erfüllbar, d.h. hat (mindestens) einen erfüllbaren Ast  $B'$ .

**Fall 2:**  $B' = B$  d.h.  $B$  erfüllbar. Sei  $\mathcal{A}$  Modell für die Formeln  $N_B$  auf  $B$ .

**Fall 2a:**  $\alpha$ -Regel angewandt  $F \equiv F_1 \wedge F_2$ . Dann ist  $\mathcal{A}$  Modell für  $N_B \cup \{F_1, F_2\}$ , d.h.: die Erweiterung von  $B$  mit dieser  $\alpha$ -Regel ist erfüllbar, so  $T$  erfüllbar.

# Lemma 1: Beweis

---

**Definition.** Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.  
Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

**Lemma 1.** Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge  $M$  ist erfüllbar

**Beweis:** Induktion  $p(n)$ : Falls  $M$  erfüllbar und das Tableau  $T$  in  $n$  Schritten aus  $M$  gebildet wurde, ist  $T$  erfüllbar

**Induktionsschritt:** Annahme  $p(n)$  gilt. Zu zeigen:  $p(n + 1)$ .

Sei  $T$  ein in  $n + 1$  Schritten gebildetes Tableau für  $M$ .

Dann gibt es ein Tableau  $T'$  für  $M$  (in  $n$  Schritten gebildet), ein Ast  $B$  von  $T'$  und eine Formel  $F$  auf  $B$  oder in  $M$ , die kein Literal ist, so dass  $T$  durch die Erweiterung von  $B$  gemäß der auf  $F$  anwendbaren Regel ( $\alpha$  oder  $\beta$ ) entstanden ist.

Induktionsvoraussetzung:  $T'$  erfüllbar, d.h. hat (mindestens) einen erfüllbaren Ast  $B'$ .

**Fall 2:**  $B' = B$  d.h.  $B$  erfüllbar. Sei  $\mathcal{A}$  Modell für die Formeln  $N_B$  auf  $B$ .

**Fall 2b:**  $\beta$ -Regel angewandt  $F \equiv F_1 \vee F_2$ . Dann  $1 = \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(F_1) \vee \mathcal{A}(F_2)$ , so  $\mathcal{A}(F_1) = 1$  oder  $\mathcal{A}(F_2) = 1$ . Dann  $\mathcal{A} \models N_B \cup \{F_i\}$ ,  $i = 1$  oder  $2$ , d.h.  $\mathcal{A}$  Modell für alle Formeln auf der Erweiterung von  $B$  mit  $F_1$  oder  $F_2$ , so  $T$  erfüllbar.

# Lemma 2: Beweis

---

## Definition.

Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

**Lemma 1.** Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge  $M$  ist erfüllbar

**Lemma 2.** Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

Beweis: Kontraposition

Annahme:  $T$  erfüllbar. Dann hat  $T$  einen erfüllbaren Ast  $B$ .

Falls die Menge der Formeln auf  $B$  (und  $M$ ) erfüllbar ist, kann  $B$  nicht Formeln  $F$  und  $\neg F$  enthalten, d.h.  $B$  kann nicht geschlossen sein.

# Korrektheit

---

## **Theorem** (Korrektheit)

Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von)  $M$  gibt (d.h. ein Tableau für  $M$ , das geschlossen ist) so ist  $M$  unerfüllbar.

# Korrektheit und Vollständigkeit

---

## Theorem (Korrektheit)

Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von)  $M$  gibt (d.h. ein Tableau für  $M$ , das geschlossen ist) so ist  $M$  unerfüllbar.

## Theorem (Vollständigkeit)

Falls  $M$  unerfüllbar, so gibt es einen Tableaubeweis für die Unerfüllbarkeit von  $M$  (d.h. ein Tableau für  $M$ , das geschlossen ist).

... alternativ:

“falls es keinen Tableaubeweis für die Unerfüllbarkeit von  $M$  gibt (d.h. “**maximales Tableau**” für  $M$  nicht geschlossen) so ist  $M$  erfüllbar”

# Kern des Vollständigkeitsbeweises

---

## Definition.

Ein Tableau heißt **voll expandiert**, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist.



# Kern des Vollständigkeitsbeweises

---

## Definition.

Ein Tableau heißt **voll expandiert**, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist.

## Lemma 3.

Sei  $B$  offener Ast in voll expandiertem Tableau.

Dann ist die Menge der Formeln in  $B$  erfüllbar.

... Also: Voll expandiertes Tableau für unerfüllbares  $M$  ist geschlossen

## Lemma 3: Beweis

---

### Lemma 3.

Sei  $B$  offener Ast in voll expandiertem Tableau.

Dann ist die Menge der Formeln in  $B$  erfüllbar.

**Beweis:** (für klausale Tableaux)

Sei  $N$  die Menge der Formeln auf  $B$ . Da  $B$  offen ist, ist  $\perp$  nicht in  $N$ .

Seien  $C \vee A$ ,  $D \vee \neg A$  zwei Klauseln in  $N$  die komplementäre Literale enthalten. Einer von  $C$ ,  $D$  ist nicht leer (sonst wäre  $B$  geschlossen).

Annahme:  $C$  nicht leer. Da  $B$  voll expandiert ist, wurde die  $\beta$ -Regel für  $C \vee A$  angewandt (auch für  $D \vee \neg A$  falls  $D$  nicht leer).

**Fall 1:**  $A, \neg A \in B$ : unmöglich, da  $B$  offen ist.

**Fall 2:**  $A, L \in B$  mit  $L$  Literal in  $D$ .  $N$  erfüllbar gdw.  $N \setminus \{D \vee \neg A\}$  erfüllbar.

**Fall 3:**  $L, \neg A \in B$ , mit  $L$  Literal in  $C$ .  $N$  erfüllbar gdw.  $N \setminus \{C \vee A\}$  erfüllbar.

**Fall 4:**  $L_1, L_2 \in B$ , mit  $L_1$  Literal in  $C$ ,  $L_2$  Literal in  $D$ .

$N$  erfüllbar gdw.  $N \setminus \{C \vee A, D \vee \neg A\}$  erfüllbar.

$N \mapsto N'$ ,  $N'$  Klauselmenge ohne komplementäre Literale und ohne  $\perp$

Die Erfüllbarkeit von  $N'$  folgt aus der Vollständigkeit der Resolution.

# Zusammenfassung: Tableaukalkül

---

Beweis durch Widerspruch und Fallunterscheidung

- Tableauregeln (mit uniformer Notation)
- Formale Definition des Kalküls
- Korrektheit und Vollständigkeit

# Klauseltableau: Beispiel

---

- (1)  $F \vee V$
- (2)  $F \vee M$
- (3)  $M \vee V$
- (4)  $M \vee P$
- (5)  $M \vee \neg P \vee V$
- (6)  $F \vee M \vee V$
- (7)  $F \vee M \vee P$
- (8)  $F \vee \neg P \vee V$
- (9)  $P \vee F$
- (10)  $P \vee M$
- (11)  $\neg V \vee P$
- (12)  $P \vee V$
- (13)  $\neg F \vee V$
- (14)  $\neg P \vee \neg F$
- (15)  $\neg M \vee \neg V \vee \neg P \vee F$

# Klauseltableau: Beispiel

- (1)  $F \vee V$
- (2)  $F \vee M$
- (3)  $M \vee V$
- (4)  $M \vee P$
- (5)  $M \vee \neg P \vee V$
- (6)  $F \vee M \vee V$
- (7)  $F \vee M \vee P$
- (8)  $F \vee \neg P \vee V$
- (9)  $P \vee F$
- (10)  $P \vee M$
- (11)  $\neg V \vee P$
- (12)  $P \vee V$
- (13)  $\neg F \vee V$
- (14)  $\neg P \vee \neg F$
- (15)  $\neg M \vee \neg V \vee \neg P \vee F$

