

Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 2

24.06.2014

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Prädikatenlogik

Syntax

1. Logische Symbole:

1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top, \perp; \neg; \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

1.2: Quantoren: \forall, \exists .

2. Nichtlogische Symbole: Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,

2.1: Ω Menge von Funktionssymbolen. **Notation:** f/n : f hat Stelligkeit $n \geq 0$,

2.2: Π Menge von Prädikatensymbolen. **Notation:** p/m : p hat Stelligkeit $m \geq 0$.

(Das Gleichheitsprädikat \approx kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

Funktionssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstanten.

Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen.

3. Variablen: X vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen, die wir für (die Bezeichnung von) **Variablen** verwenden.

Terme

Mit $T_\Sigma(X)$ bezeichnen wir die Menge der Σ -Terme.

Menge $T_\Sigma(X)$ der Σ -Terme:

Die kleinste Menge mit: $X \subseteq T_\Sigma(X)$

Wenn • $f \in \Omega$,

• n ist die Stelligkeit von f

• $t_1, \dots, t_n \in T_\Sigma(X)$

dann $f(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma(X)$

Atome

Atome (Atomare Formeln) über Σ genügen dieser Syntax:

$$A, B ::= p(s_1, \dots, s_m) \quad , p/m \in \Pi$$
$$\left[\quad \mid \quad (s \approx t) \quad \text{(Gleichung)} \quad \right]$$

wobei $s_1, \dots, s_m, s, t \in T_\Sigma(X)$.

Ist $m = 0$, so handelt es sich bei p um eine **Aussagenvariable**.

Atome:

Formeln der Form $p(s_1, \dots, s_m)$, wobei $p/m \in \Pi$ und $s_1, \dots, s_m \in T_\Sigma(X)$.

Formeln

Menge For_Σ der Formeln über Σ :

Die kleinste Menge, die

- Alle atomaren Formeln enthält,
- $\top \in \text{For}_\Sigma$, $\perp \in \text{For}_\Sigma$,
- Wenn $F, G \in \text{For}_\Sigma$, dann auch
 $\neg F, F \wedge G, F \vee G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G \in \text{For}_\Sigma$,
- Wenn $F \in \text{For}_\Sigma$ und $x \in X$, dann
 $\forall x F \in \text{For}_\Sigma, \exists x F \in \text{For}_\Sigma$

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$g(a, x)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$p(g(a, y, b), x)$	nein	ja	ja	ja	ja	nein
$p(q(a), b)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x))$	nein	nein	ja	ja	ja	nein
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$	nein	nein	nein	ja	ja	nein
$\forall x(p(x, f(x, x)))$	nein	nein	nein	nein	ja	nein
$\forall b(p(b, f(b, b)))$	nein	nein	nein	nein	nein	ja

Konvention

- Wir werden die **Variablen** in X mit den Buchstaben x, y, z, u, v, w (möglicherweise mit Indizen: x_1, x_2, \dots) bezeichnen.
- Für die Bezeichnung der **Funktionssymbole** werden wir normalerweise die Buchstaben f, g, h (möglicherweise mit Indizen) benutzen.

Für die **Konstanten** werden wir die Buchstaben a, b, c, d, k benutzen.

Für **Funktionssymbole aus der Arithmetik** werden die entsprechenden Symbole $+, *, -, s, \dots$; oder die Konstanten $0, 1, \dots$ benutzt.

- Für die Bezeichnung der **Prädikatensymbole** werden wir normalerweise die Buchstaben p, q, r, s (möglicherweise mit Indizen) benutzen.
- Für **Aussagenvariablen** (d.h. Prädikatensymbole mit Stelligkeit 0) werden wir manchmal die Symbole P, Q, R, S, T benutzen.

Konvention

- Für die Bezeichnung der **Terme** benutzen wir normalerweise die Buchstaben s, t (möglicherweise mit Indizen).
- Für die Bezeichnung der **Atome** benutzen wir normalerweise die Buchstaben A, B (möglicherweise mit Indizen).
- **Literale** bezeichnen wir normalerweise mit L, L_1, L_2, \dots .
- **Klauseln** werden mit $C, C_1, C_2, \dots, D, D_1, D_2, \dots$ bezeichnet.
- **Formeln** werden normalerweise mit F, G, H bezeichnet (möglicherweise mit Indizen).

Beispiel: Tante Agatha

Jemand, der in Schloss Dreadbury wohnt, hat Tante Agatha ermordet. Agatha, ihr Butler und ihr Neffe Charles waren die einzigen Bewohner von Schloss Dreadbury. Ein Mörder hasst immer sein Opfer und ist niemals reicher als sein Opfer. Charles hasst niemanden, den Tante Agatha gehasst hat. Agatha hat jeden gehasst außer ihrem Butler. Der Butler hasst jeden, der nicht reicher ist als Tante Agatha. Der Butler hasst jeden, den Tante Agatha gehasst hat. Niemand hasst jeden. Agatha war nicht der Butler.

Wer hat Tante Agatha ermordet?

Beispiel: Tante Agatha

Jemand, der in Schloss Dreadbury wohnt, hat Tante Agatha ermordet.

- ▶ $\exists x (\text{schlossbewohner}(x) \wedge \text{ermordet}(x, a))$

Agatha, ihr Butler und ihr Neffe Charles waren die einzigen Bewohner von Schloss Dreadbury.

- ▶ $\forall x (\text{schlossbewohner}(x) \leftrightarrow (x \approx a \vee x \approx b \vee x \approx c))$

Beispiel: Tante Agatha

Ein Mörder hasst immer sein Opfer und ist niemals reicher als sein Opfer.

- ▶ $\forall x, y (\text{ermordet}(x, y) \rightarrow \text{hasst}(x, y))$
 $\forall x, y (\text{ermordet}(x, y) \rightarrow \neg \text{reicher}(x, y))$

Charles hasst niemanden, den Tante Agatha gehasst hat.

- ▶ $\forall x (\text{hasst}(c, x) \rightarrow \neg \text{hasst}(a, x))$

Agatha hat jeden gehasst außer ihrem Butler.

- ▶ $\forall x (\neg \text{hasst}(a, x) \leftrightarrow x \approx b)$

Beispiel: Tante Agatha

Der Butler hasst jeden, der nicht reicher ist als Tante Agatha.

▶ $\forall x (\neg \text{reicher}(x, a) \rightarrow \text{hasst}(b, x))$

Der Butler hasst jeden, den Tante Agatha gehasst hat.

▶ $\forall x (\text{hasst}(a, x) \rightarrow \text{hasst}(b, x))$

Niemand hasst jeden.

▶ $\forall x \exists y (\neg \text{hasst}(x, y))$

Agatha war nicht der Butler.

▶ $\neg a \approx b$

Beispiel: Arithmetik

$$\Sigma_{PA} = (\Omega_{PA}, \Pi_{PA})$$

$$\Omega_{PA} = \{0/0, +/2, */2, s/1\}$$

$$\Pi_{PA} = \{\leq /2, < /2, \approx /2\}$$

$$+, * \text{ infix}; * >_p +$$

Formelbeispiele über dieser Signatur sind

$$\forall x, y (x \leq y \leftrightarrow \exists z (x + z \approx y))$$

$$\exists x \forall y (x + y \approx y)$$

$$\forall x, y (x * s(y) \approx x * y + x)$$

$$\forall x, y (s(x) \approx s(y) \rightarrow x \approx y)$$

$$\forall x \exists y x < y$$

Gebundene und freie Variablen

Gebundene und freie Variablen

Definitionen:

- In QxF , $Q \in \{\exists, \forall\}$, heißt F der **Bindungsbereich** des Quantors Qx .
- Ein Auftreten einer Variablen x heißt **gebunden**, wenn es zum Bindungsbereich eines Quantors Qx gehört.
- Alle anderen Auftreten von Variablen heißen **frei**.

Formeln ohne freie Variablen heißen **Satzformen**.

Variablenfreie Formeln heißen **Grundformeln**.

Beispiel

$$\forall y \quad (\forall x \quad p(x) \rightarrow q(x, y))$$

Bindungsbereich

Bind.

Beispiel

$$p(z) \rightarrow \forall x (q(x, z) \wedge \exists y r(y, z))$$

Beispiel

$$p(z) \rightarrow \forall x (q(x, z) \wedge \exists z r(y, z))$$

- x gebunden
- y frei
- z frei und gebunden

Substitution eines Termes für eine Variable

Substitution eines Termes für eine Variable

Mit $F[s/x]$ bezeichnen wir das Resultat der Substitution aller freien Auftreten von x in F durch den Term s . $F[s/x]$ sei durch strukturelle Induktion über den Aufbau von F wie folgt definiert:

$$x[s/x] = s$$

$$x'[s/x] = x' ; \text{ falls } x' \neq x$$

$$f(s_1, \dots, s_n)[s/x] = f(s_1[s/x], \dots, s_n[s/x])$$

$$\perp[s/x] = \perp$$

$$\top[s/x] = \top$$

$$p(s_1, \dots, s_n)[s/x] = p(s_1[s/x], \dots, s_n[s/x])$$

$$(u \approx v)[s/x] = (u[s/x] \approx v[s/x])$$

$$\neg F[s/x] = \neg(F[s/x])$$

$$(F \rho G)[s/x] = (F[s/x] \rho G[s/x]) ; \text{ für alle binären Junktoren } \rho \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

$$(QyF)[s/x] = Qz((F[z/y])[s/x]) ; \text{ } z \text{ neue Variable}$$

Beispiel

Terme:

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$x, y, z, u \in X$$

$$\begin{aligned} g(f(x), g(f(x), z)) \quad [g(y, u)/x] \\ = g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), z)) \end{aligned}$$

Beispiel

Atome:

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$x, y, z, u \in X$$

$$\begin{aligned} p(g(f(x), g(f(x), z)), y) & [g(y, u)/x] \\ &= p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), z)), y) \end{aligned}$$

Beispiel

Formeln ohne Quantoren:

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$x, y, z, u \in X$$

$$\begin{aligned} p(g(f(x), g(f(x), z)), y) \wedge (g(x, y) \approx f(g(z, z))) \quad [g(y, u)/x] \\ = p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), z)), y) \wedge (g(g(y, u), y) \approx f(g(z, z))) \end{aligned}$$

Formeln mit Quantoren: Problematik

$$(QyF)[s/x] = Qz((F[z/y])[s/x]) ; \quad z \text{ neue Variable}$$

Der Grund für die Umbenennung der gebundenen Variablen y in eine neue „unbenutzte“ Variable z ist die Vermeidung des Einfangens freier Variablen in s .

Sollte y in s auftreten, wären sonst diese Auftreten nach erfolgter Substitution gebunden.

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z))) [g(y, z)/x]$

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$\begin{aligned} & (\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z))) [g(y, z)/x] \\ & = \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x] \wedge \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x] \end{aligned}$$

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$\begin{aligned} & (\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z))) [g(y, z)/x] \\ & = \forall x(p(x, g(f(x), y))) [g(y, z)/x] \wedge \exists z(x \approx g(y, z)) [g(y, z)/x] \\ & = \forall v(p(x, g(f(x), y)) [v/x]) [g(y, z)/x] \wedge \exists u((x \approx g(y, z)) [u/z]) [g(y, z)/x] \end{aligned}$$

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$\begin{aligned} & (\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z))) \quad [g(y, z)/x] \\ & = \forall x(p(x, g(f(x), y))) [g(y, z)/x] \wedge \exists z(x \approx g(y, z)) [g(y, z)/x] \\ & = \forall v(p(x, g(f(x), y)) [v/x]) [g(y, z)/x] \wedge \exists u((x \approx g(y, z)) [u/z]) [g(y, z)/x] \\ & = \forall v(p(v, g(f(v), y))) [g(y, z)/x] \wedge \exists u((x \approx g(y, u)) [g(y, z)/x]) \end{aligned}$$

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$\begin{aligned} & (\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z))) [g(y, z)/x] \\ &= \forall x(p(x, g(f(x), y))) [g(y, z)/x] \wedge \exists z(x \approx g(y, z)) [g(y, z)/x] \\ &= \forall v(p(x, g(f(x), y)) [v/x]) [g(y, z)/x] \wedge \exists u(((x \approx g(y, z)) [u/z]) [g(y, z)/x]) \\ &= \forall v(p(v, g(f(v), y))) [g(y, z)/x] \wedge \exists u((x \approx g(y, u)) [g(y, z)/x]) \\ &= \forall v(p(v, g(f(v), y))) \wedge \exists u(g(y, z) \approx g(y, u)) \end{aligned}$$

Substitution allgemein

Definition. **Substitutionen** sind Abbildungen

$$\sigma : X \rightarrow T_{\Sigma}(X),$$

so dass der **Bereich** von σ , d.h. die Menge

$$\text{dom}(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\},$$

endlich ist. Die Menge der **eingeführten Variablen**, d.h. der Variablen die in einem der Terme $\sigma(x)$, für $x \in \text{dom}(\sigma)$, auftreten, wird mit $\text{codom}(\sigma)$ bezeichnet.

Substitutionen schreiben wir auch als $[s_1/x_1, \dots, s_n/x_n]$, x_i pw. verschieden, und meinen dann die Abbildung

$$[s_1/x_1, \dots, s_n/x_n](y) = \begin{cases} s_i, & \text{falls } y = x_i \\ y, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ab jetzt schreiben wir für die Applikation $\sigma(x)$ von Substitutionen $x\sigma$.

Anwendung einer Substitution

„Homomorphe“ Fortsetzung von σ auf Terme und Formeln:

$$f(s_1, \dots, s_n)\sigma = f(s_1\sigma, \dots, s_n\sigma)$$

$$\perp\sigma = \perp$$

$$\top\sigma = \top$$

$$p(s_1, \dots, s_n)\sigma = p(s_1\sigma, \dots, s_n\sigma)$$

$$(u \approx v)\sigma = (u\sigma \approx v\sigma)$$

$$\neg F\sigma = \neg(F\sigma)$$

$$(F\rho G)\sigma = (F\sigma\rho G\sigma); \text{ f\u00fcr alle bin\u00e4ren Junktoren } \rho$$

$$(QxF)\sigma = Qz((F[z/x])\sigma); \text{ wobei } z \text{ „neue“ Variable}$$

Ab\u00e4nderung einer Substitution σ an x zu t :

$$\sigma[x \rightarrow t](y) = \begin{cases} t, & \text{falls } y = x \\ \sigma(y), & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Terme

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$\begin{aligned} g(f(x), g(f(x), z)) & [g(y, u)/x, f(x)/y, a/z] \\ &= g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), a)) \end{aligned}$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Atome

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$\begin{aligned} p(g(f(x), g(f(x), z)), y) [g(y, u)/x, f(x)/y, a/z] \\ = p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), a)), f(x)) \end{aligned}$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln ohne Quantoren

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$\begin{aligned} & p(g(f(x), g(f(x), z)), y) \wedge (g(x, y) \approx f(g(z, z))) [g(y, u)/x, f(x)/y, a/z] \\ & = p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), a)), f(x)) \wedge (g(g(y, u), f(x)) \approx f(g(a, a))) \end{aligned}$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$\begin{aligned} & (\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \\ &= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \wedge \\ & \quad \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \end{aligned}$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \wedge \\ \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall v((p(x, g(f(x), y))[v/x])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \wedge \\ \exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z])$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$\begin{aligned} & (\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \\ &= \forall x(p(x, g(f(x), y))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \wedge \\ & \quad \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \\ &= \forall v((p(x, g(f(x), y))[v/x])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \wedge \\ & \quad \exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \\ &= \forall v(p(v, g(f(v), f(x)))) \wedge \exists u((x \approx g(y, u))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \end{aligned}$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), \text{ mit } \Omega = \{f/1, g/2, a/0\}, \Pi = \{p/2, \approx /2\}$$

$$\begin{aligned} & (\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \\ &= \forall x(p(x, g(f(x), y))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \wedge \\ & \quad \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \\ &= \forall v((p(x, g(f(x), y))[v/x])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \wedge \\ & \quad \exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \\ &= \forall v(p(v, g(f(v), f(x)))) \wedge \exists u((x \approx g(y, u))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \\ &= \forall v(p(v, g(f(v), f(x)))) \wedge \exists u(g(y, z) \approx g(f(x), u)) \end{aligned}$$

Bis jetzt

Prädikatenlogik

- Syntax
 - Signatur
 - Terme
 - Formeln
 - Substitutionen

Jetzt

Prädikatenlogik

- Syntax
- Semantik

Semantik

Semantik geben bedeutet für logische Systeme, einen Begriff von Wahrheit für Formeln zu definieren. Das hier für die Prädikatenlogik zu definierende Konzept geht auf Tarski zurück.

In der **klassischen Logik** (zurückgehend auf Aristoteles) gibt es „nur“ die zwei Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“, die wir mit 1 und 0 bezeichnen.

Strukturen

Definition.

Eine Σ -Struktur (bzw. Σ -Interpretation bzw. Σ -Modell) ist ein Tripel

$$\mathcal{A} = (U, (f_{\mathcal{A}} : U^n \rightarrow U)_{f/n \in \Omega}, (p_{\mathcal{A}} \subseteq U^m)_{p/m \in \Pi})$$

wobei $U \neq \emptyset$ eine Menge, genannt **Universum** von \mathcal{A} .

Oft identifizieren wir U mit \mathcal{A} , wenn die Interpretation der Funktions- und Prädikatensymbole eindeutig aus dem Kontext hervorgeht.

Mit Σ -Str bezeichnen wir die Menge aller Σ -Strukturen.

Strukturen

Beispiel:

$$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$$

$$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \{0_{\mathcal{N}}, +_{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}, \{\leq_{\mathcal{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \approx_{\mathcal{N}}\})$$

$$0_{\mathcal{N}} = 0 \in \mathbb{N},$$

$$+_{\mathcal{N}}(n_1, n_2) = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$$

$$\leq_{\mathcal{N}} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\}$$