# Logik für Informatiker

## 3. Prädikatenlogik

## Teil 4

1.07.2014

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

# Prädikatenlogik

## Syntax

1. **Logische Symbole:**
   1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top$, $\bot$; $\neg$; $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
   1.2: Quantoren: $\forall$, $\exists$.

2. **Nichtlogische Symbole:** Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,
   2.1: $\Omega$ Menge von Funktionssymbolen. Notation: $f/n$: $f$ hat Stelligkeit $n \geq 0$,
   2.2: $\Pi$ Menge von Prädikatensymbolen. Notation: $p/m$: $p$ hat Stelligkeit $m \geq 0$.
   (Das Gleichheitsprädikat $\approx$ kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

   Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstante

   Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen

3. **Variablen:** $X$ vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen ist, die wir für (die Bezeichnung von) Variablen verwenden.

- Terme
- Formeln
- Substitutionen

# Prädikatenlogik

**Semantik:**

- $\Sigma$-Strukturen
- Valuationen
- Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. $\beta$
- Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. $\beta$

# Modelle, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

# Gültigkeit und Erfüllbarkeit

**Definition.** $F$ gilt in $\mathcal{A}$ unter $\beta$:

$$\mathcal{A}, \beta \models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A}(\beta)(F) = 1$$

**Definition.** $F$ gilt in $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ ist Modell von $F$):

$$\mathcal{A} \models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta \models F, \text{ für alle } \beta : X \to U_{\mathcal{A}}$$

**Definition.** $F$ ist (allgemein-) gültig:

$$\models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A} \models F, \text{ für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str}$$

**Definition.** $F$ heißt erfüllbar gdw. es $\mathcal{A}$ und $\beta$ gibt, so dass $\mathcal{A}, \beta \models F$.
Sonst heißt $F$ unerfüllbar.

# Beispiele

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$ .

Sei $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$ $\quad \{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ )$

$n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2$ $\quad (n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A}$ iff $n_1 \leq n_2$ in $\mathbb{N}$

$n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2$ $\quad (n_1, n_2) \in <_\mathcal{A}$ iff $n_1 < n_2$ in $\mathbb{N}$

$\mathsf{s}_\mathcal{A} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$ $\quad \text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\}$

$\mathsf{s}(n) = n + 1$ $\quad \text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$

$0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\}$ $\quad \text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k+1 \ldots\},$

und $\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$.

(1) $\mathcal{A}, \beta \models \text{ungerade}(x)$

(2) $\mathcal{A}, \beta \models \text{gerade}(y)$.

(3) $\mathcal{A} \not\models \text{ungerade}(x)$,
da für $\beta' : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta'(x) = 0$, $\mathcal{A}(\beta')(\text{ungerade}(x)) = 0$.

# Beispiele

(4) $\mathcal{A} \models \text{gerade}(x) \vee \text{ungerade}(x)$

Erklärung: Für jede Valuation $\beta' : X \to \mathbb{N}$:

falls $\beta'(x) = 2k$, $\mathcal{A}(\beta')(\text{gerade}(x)) = 1$
falls $\beta'(x) = 2k+1$, $\mathcal{A}(\beta')(\text{ungerade}(x)) = 1$

d.h. $\mathcal{A}(\beta')(\text{gerade}(x) \vee \text{ungerade}(x)) = 1$.

(5) $\not\models \text{gerade}(x) \vee \text{ungerade}(x)$

Erklärung: Sei $\mathcal{A}'$ $\Sigma$-Struktur mit $\text{gerade}_{\mathcal{A}'} = \text{ungerade}_{\mathcal{A}'} = \emptyset$.

Dann: $\mathcal{A}' \not\models \text{gerade}(x) \vee \text{ungerade}(x)$.

(6) $\models \text{gerade}(x) \vee \neg\text{gerade}(x)$

Erklärung: Set $\mathcal{A}'$ eine $\Sigma$-Struktur und $\beta'$ eine Valuation.
falls $\beta'(x) \in \text{gerade}_{\mathcal{A}'}$, so $\mathcal{A}'(\beta')(\text{gerade}(x)) = 1$
falls $\beta'(x) \notin \text{gerade}_{\mathcal{A}'}$, so $\mathcal{A}'(\beta')(\neg\text{gerade}(x)) = 1$
d.h. $\mathcal{A}'(\beta')(\text{gerade}(x) \vee \neg\text{gerade}(x)) = 1$

# Folgerung und Äquivalenz

**Definition.** $F$ impliziert $G$ (oder $G$ folgt aus $F$), i.Z. $F \models G$
gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ gilt:
Falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.

**Definition.** $F$ und $G$ sind äquivalent
gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ gilt:
$\mathcal{A}, \beta \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Erweiterung auf Formelmengen $N$ in natürlicher Weise:

**Definition.** $N \models G$ gdw.
für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$:
falls ($\mathcal{A}, \beta \models F$, für alle $F \in N$), so ($\mathcal{A}, \beta \models G$).

# Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

**Satz.** $F \models G$ gdw. $(F \to G)$ ist gültig

**Satz.** $F$ und $G$ sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

# Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

**Satz.** $F \models G$ gdw. $(F \rightarrow G)$ ist gültig

Beweis

$$\begin{array}{lll} F \models G & \text{gdw.} & \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}\text{: Falls } \mathcal{A}, \beta \models F \text{, so } \mathcal{A}, \beta \models G. \\ & \text{gdw.} & \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}\text{: } \mathcal{A}(\beta)(F) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G) = 1 \\ & \text{gdw.} & \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}\text{: } \mathcal{A}(\beta)(F \rightarrow G) = 1 \end{array}$$

**Satz.** $F$ und $G$ sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

# Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

**Satz.** $F \models G$ gdw. $(F \rightarrow G)$ ist gültig

Beweis

$$\begin{array}{lll} F \models G & \text{gdw.} & \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}\text{: Falls } \mathcal{A}, \beta \models F, \text{ so } \mathcal{A}, \beta \models G. \\ & \text{gdw.} & \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}\text{: } \mathcal{A}(\beta)(F) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G) = 1 \\ & \text{gdw.} & \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}\text{: } \mathcal{A}(\beta)(F \rightarrow G) = 1 \end{array}$$

**Satz.** $F$ und $G$ sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Beweis

$$\begin{array}{lll} F \text{ und } G \text{ sind äquivalent} & \text{gdw.} & F \models G \text{ und } F \models G \\ & \text{gdw.} & \models F \rightarrow G \text{ und } \models G \rightarrow F \\ & \text{gdw.} & \models F \leftrightarrow G \end{array}$$

# Gültigkeit und Unerfüllbarkeit

Nachweis von Gültigkeit (und damit Folgerung oder Äquivalenz) durch Unerfüllbarkeitstest:

$F$ gültig genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar

$N \models F$ genau dann, wenn $N \cup \neg F$ unerfüllbar

# Eigenschaften von Quantoren

## Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$ ist das gleiche wie $\forall y \forall x$

$\exists x \exists y$ ist das gleiche wie $\exists y \exists x$

# Eigenschaften von Quantoren

## Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$ ist das gleiche wie $\forall y \forall x$

$\exists x \exists y$ ist das gleiche wie $\exists y \exists x$

**Informell:** Für jede Formel $F$ gilt: $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$; $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$.

**Theorem**

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle $\Sigma$-Formeln $F$ gilt:

(1) $\quad \forall x \forall y\, F \equiv \forall y \forall x\, F$

(2) $\quad \exists x \exists y\, F \equiv \exists y \exists x\, F$

# Eigenschaften von Quantoren

**Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT**

# Eigenschaften von Quantoren

**Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT**

**Beispiel:**

$\forall x \exists y \quad Mutter(y, x)$ Jeder hat eine Mutter (richtig)

# Eigenschaften von Quantoren

## Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

**Beispiel:**

| | | |
|---|---|---|
| $\forall x \exists y \quad \mathit{Mutter}(y, x)$ | Jeder hat eine Mutter | (richtig) |
| $\exists y \forall x \quad \mathit{Mutter}(y, x)$ | Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist | (falsch) |

# Eigenschaften von Quantoren

**Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT**

**Beispiel:**

$\forall x \exists y \ \ Mutter(y, x)$ Jeder hat eine Mutter (richtig)

$\exists y \forall x \ \ Mutter(y, x)$ Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist (falsch)

**Bemerkung:** $\forall x \exists y F \equiv \exists y \forall x F$ gilt nicht immer.
Es gibt eine Formel $F$ so dass $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ nicht logisch äquivalent.

**Theorem.** Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle $\Sigma$-Formeln $F$ gilt:

$$\exists x \forall y\, F \models \forall y \exists x\, F$$

Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und eine Formel $F$ mit:

$$\forall x \exists y\, F \not\models \exists y \forall x\, F$$

# Eigenschaften von Quantoren

## Dualität der Quantoren

$\forall x$... ist das gleiche wie $\neg\exists x\neg$...

$\exists x$... ist das gleiche wie $\neg\forall x\neg$...

# Eigenschaften von Quantoren

## Dualität der Quantoren

$\forall x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\exists x \neg \ldots$

$\exists x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\forall x \neg \ldots$

**Beispiel:**

$\forall x\, \text{mag}(x, \text{eiscreme})$ ist das gleiche wie $\neg\exists x\, \neg\text{mag}(x, \text{eiscreme})$

$\exists x\, \text{mag}(x, \text{broccoli})$ ist das gleiche wie $\neg\forall x\, \neg\text{mag}(x, \text{broccoli})$

# Eigenschaften von Quantoren

**Dualität der Quantoren**

$\forall x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\exists x \neg \ldots$

$\exists x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\forall x \neg \ldots$

**Beispiel:**

$\forall x \,\text{mag}(x, \text{eiscreme})$ ist das gleiche wie $\neg\exists x \,\neg\text{mag}(x, \text{eiscreme})$

$\exists x \,\text{mag}(x, \text{broccoli})$ ist das gleiche wie $\neg\forall x \,\neg\text{mag}(x, \text{broccoli})$

**Informell:** Für jede Formel $F$ gilt: $\forall x F \equiv \neg\exists x \neg F$; $\exists x F \equiv \neg\forall x \neg F$.

**Theorem.** Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle $\Sigma$-Formeln $F$ gilt:

(1) $\quad \forall x\, F \equiv \neg\exists x\, \neg F$

(2) $\quad \exists x\, F \equiv \neg\forall x\, \neg F$

# Eigenschaften von Quantoren

**$\forall$ distributiert über $\wedge$**

$\forall x(\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

# Eigenschaften von Quantoren

**$\forall$ distributiert über $\wedge$**

$\forall x(\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

**Beispiel**

$\forall x\,(\mathit{studiert}(x) \wedge \mathit{arbeitet}(x))$ ist das gleiche wie

$(\forall x\, \mathit{studiert}(x)) \wedge (\forall x\, \mathit{arbeitet}(x))$

# Eigenschaften von Quantoren

**$\forall$ distributiert über $\wedge$**

$\forall x(\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

**Beispiel**

$\forall x\, (\mathit{studiert}(x) \wedge \mathit{arbeitet}(x))$ ist das gleiche wie

$(\forall x\, \mathit{studiert}(x)) \wedge (\forall x\, \mathit{arbeitet}(x))$

**Informell:** Für alle Formeln $F$, $G$ gilt: $\forall x(F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$.

**Theorem.** Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle $\Sigma$-Formeln $F$, $G$ gilt:

$$\forall x(F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$$

# Eigenschaften von Quantoren

**$\exists$ distributiert über $\vee$**

$\exists x(\ldots \vee \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

# Eigenschaften von Quantoren

**$\exists$ distributiert über $\vee$**

$\exists x(\ldots \vee \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

**Beispiel**

$\exists x\, (\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist das gleiche wie

$(\exists x\, \mathit{gerade}(x)) \vee (\exists x\, \mathit{ungerade}(x))$

# Eigenschaften von Quantoren

**$\exists$ distributiert über $\vee$**

$\exists x(\ldots \vee \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

**Beispiel**

$\exists x\,(\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist das gleiche wie

$(\exists x\, \mathit{gerade}(x)) \vee (\exists x\, \mathit{ungerade}(x))$

**Informell:** Für alle Formeln $F, G$ gilt: $\exists x(F \vee G) \equiv \exists x F \vee \exists x G$.

**Theorem.** Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle $\Sigma$-Formeln $F, G$ gilt:

$$\exists x\,(F \vee G) \equiv (\exists x\, F) \vee (\exists x\, G)$$

# Eigenschaften von Quantoren

**$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$**

$\forall x(\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

# Eigenschaften von Quantoren

**$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$**

$\forall x(\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

**Beispiel**

$\forall x\, (\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie

$(\forall x\, \mathit{gerade}(x)) \vee (\forall x\, \mathit{ungerade}(x))$

# Eigenschaften von Quantoren

**$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$**

$\forall x(\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

**Beispiel**

$\forall x\,(\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie

$(\forall x\,\mathit{gerade}(x)) \vee (\forall x\,\mathit{ungerade}(x))$

**Theorem.** Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und $\Sigma$-Formeln $F$, $G$ mit:

$$\forall x(F \vee G) \not\equiv \forall x F \vee \forall x G$$

(1) $\forall x F \vee \forall x G \models \forall x(F \vee G)$
(2) $\forall x(F \vee G) \not\models \forall x F \vee \forall x G$

# Eigenschaften von Quantoren

**$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$**

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x\ldots) \wedge (\exists x\ldots)$

# Eigenschaften von Quantoren

**$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$**

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \ldots) \wedge (\exists x \ldots)$

**Beispiel**

$\exists x\,(\mathit{gerade}(x) \wedge \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie
$(\exists x\, \mathit{gerade}(x)) \wedge (\exists x\, \mathit{ungerade}(x))$

# Eigenschaften von Quantoren

**$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$**

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \ldots) \wedge (\exists x \ldots)$

**Beispiel**

$\exists x\, (\mathit{gerade}(x) \wedge \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie
$(\exists x\, \mathit{gerade}(x)) \wedge (\exists x\, \mathit{ungerade}(x))$

**Theorem.** Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und $\Sigma$-Formeln $F$, $G$ mit:

$$\exists x(F \wedge G) \not\equiv \exists x F \wedge \exists x G$$

(1) $\exists x(F \wedge G) \models \exists x F \wedge \exists x G$
(2) $\exists x F \wedge \exists x G \not\models \exists x(F \wedge G)$

# Zusammenfassung

**Wichtige Äquivalenzen**

- $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
- $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

- $\forall x(F \wedge G) \equiv (\forall x F) \wedge (\forall x G)$
- $\exists x(F \vee G) \equiv (\exists x F) \vee (\exists x G)$

- $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F \qquad \neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
- $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F \qquad \neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

# Zusammenfassung

**Aber Vorsicht**

$\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$

- $\exists y \forall x F \models \forall x \exists y F$
- $\forall x \exists y F \not\models \exists y \forall x F$

$\forall x (F \vee G) \not\equiv (\forall x F) \vee (\forall x G)$

- $(\forall x F) \vee (\forall x G) \models \forall x (F \vee G)$
- $\forall x (F \vee G) \not\models \forall x F \vee \forall x G$

$\exists x (F \wedge G) \not\equiv (\exists x F) \wedge (\exists x G)$

- $\exists x (F \wedge G) \models (\exists x F) \wedge (\exists x G)$
- $(\exists x F) \wedge (\exists x G) \not\models \exists x (F \wedge G)$

# Strukturelle Induction

- für Terme
- für Formeln in Prädikatenlogik

# Strukturelle Induktion: Terme

**Menge $T_\Sigma(X)$ der $\Sigma$-Terme:**

Die kleinste Menge mit:
- $X \subseteq T_\Sigma(X)$

Wenn
- $f \in \Omega$,
- $n$ ist die Stelligkeit von $f$
- $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)$

dann $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma(X)$

# Strukturelle Induktion: Terme

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

Sei $p(t)$ eine Eigenschaft der $\Sigma$-Terme in Prädikatenlogik

**Behauptung:** Für alle Terme $t$, $p(t)$ gilt

**Beweis durch strukturelle Induktion:**

**Induktionsbasis:** Zu zeigen:
$p(t)$ gilt für $t \in X$ und für alle Konstanten.

Sei $t$ ein Term (nicht Variable oder Konstante).
**Induktionsvoraussetzung:**
$p(s)$ gilt für alle Teilterme $s$ von $t$ (mit $s \neq t$)

**Induktionsschritt:** Zu zeigen: $p(t)$ gilt:

Fallunterschied über alle $f \in \Omega$ mit $t = f(t_1, \dots, t_n)$.

# Strukturelle Induktion: Formeln

**Menge $\mathsf{For}_\Sigma$ der Formeln über $\Sigma$:**

Die kleinste Menge, die

- Alle atomaren Formeln enthält,
- $\top \in \mathsf{For}_\Sigma$, $\bot \in \mathsf{For}_\Sigma$,
- Wenn $F, G \in \mathsf{For}_\Sigma$, dann auch
  $\neg F, F \wedge G, F \vee G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G \in \mathsf{For}_\Sigma$,
- Wenn $F \in \mathsf{For}_\Sigma$ und $x \in X$, dann
  $\forall x F \in \mathsf{For}_\Sigma, \exists x F \in \mathsf{For}_\Sigma$

# Strukturelle Induktion: Formeln

Sei $p(F)$ eine Eigenschaft der $\Sigma$-Formeln in Prädikatenlogik

**Behauptung:** Für alle Formeln $F$, $p(F)$ gilt

**Beweis durch strukturelle Induktion:**

**Induktionsbasis:** Zu zeigen:
$p(F)$ gilt für $F \in \{\top, \bot\}$ und für alle atomaren Formeln.

Sei $F$ eine Formel (nicht atomar oder $\top$ oder $\bot$).
**Induktionsvoraussetzung:**
$p(G)$ gilt für alle Teilformeln $G$ von $F$ (mit $G \neq F$)

**Induktionsschritt:** Zu zeigen: $p(F)$ gilt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Fall 1 | $F = \neg G$ | Fall 2 | $F = G_1 \vee G_2$ |
| Fall 3 | $F = G_1 \wedge G_2$ | Fall 4 | $F = G_1 \rightarrow G_2$ |
| Fall 5 | $F = G_1 \leftrightarrow G_2$ | Fall 6 | $F = \forall x G$ |
| | | Fall 7 | $F = \exists x G$ |

# Substitutionen und Valuationen

**Theorem** (Substitutionslemma)
Für alle $\Sigma$-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen $\beta$, $\Sigma$-Formeln $F$, Variablen $x$ und Terme $t$ gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \quad \text{g.d.w. } \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

# Substitutionen und Valuationen

**Theorem** (Substitutionslemma)
Für alle $\Sigma$-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen $\beta$, $\Sigma$-Formeln $F$, Variablen $x$ und Terme $t$ gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: Strukturelle Induktion

# Substitutionen und Valuationen

**Theorem** (Substitutionslemma)
Für alle $\Sigma$-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen $\beta$, $\Sigma$-Formeln $F$, Variablen $x$ und Terme $t$ gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: Strukturelle Induktion

**Plan:** Wir benutzen folgendes Lemma:

**Lemma:** Für alle $\Sigma$-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen $\beta$, Variable $x$ und Terme $t_i$, $t$:
$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$

**Beweise:** nächste Vorlesung