Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 6

10.07.2014

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Prädikatenlogik

Syntax

- Terme
- Formeln
- Substitutionen

Semantik:

- Σ-Strukturen; Valuationen
- Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β
- Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β
- Modell, Gültigkeit, Erfüllbarkeit, Folgerung und Äquivalenz
- Wichtige Äquivalenzen
- Substitutionslemma

Unser Ziel

Kalküle zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

Normalformen

Vorteile von Normalformen

- Reduktion der logischen Konzepte
- einfache Datenstrukturen für Beweisverfahren

- Negationsnormalform
- Bereinigte Formeln
- Pränexe Normalform
- Skolem Normalform

Pränexe Normalform

Definition: Pränexe Formeln sind von der Form

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \; F,$$

wobei F quantorenfrei, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. Hierbei heißt $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$ der Quantorenpräfix und F die Matrix der Formel.

Pränexe Normalform

Theorem. Zu jeder Formel $F \in For_\Sigma$ gibt es eine äquivalente Formel in Pränexnormalform

Konstruktiver Beweis

(1) Formel in NNF transformieren

1. Elimination von $\leftrightarrow$
2. Elimination von $\rightarrow$
3. "Nach innen schieben" von $\neg$
   - aussagenlogische Umformungen (de Morgans Regeln; $\neg\neg A \equiv A$)
   - $\neg \forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$
   - $\neg \exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x)$

(2) Formel bereinigen

(3) Alle Quantoren nach vorne (Reihenfolge unverändert lassen)

Skolemnormalform

Definition. Eine Formel $F \in \mathrm{For}_\Sigma$ ist in Skolemnormalform (SNF), falls:

- F ist in Pränexnormalform
- F enthält nur universelle Quantoren

Skolemnormalform

Definition. Eine Formel $F \in \mathsf{For}_\Sigma$ ist in Skolemnormalform (SNF), falls:

- F ist in Pränexnormalform
- F enthält nur universelle Quantoren

Beispiele:

In Skolemnormalform

$$\forall x \forall y (p(x) \vee q(y))$$

Nicht in Skolemnormalform

$$\forall x\, p(x) \vee \forall y\, q(y)$$

$$\forall x \exists y\, (p(x) \vee q(y))$$

Skolemisierung

Skolemisierung: Transformation $\Rightarrow_S$:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \exists y F \quad \Rightarrow_S \quad \forall x_1, \ldots, x_n F[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$$

wobei f/n ein neues Funktionssymbol (Skolemfunktion).

Skolemisierung

Beispiel

Gegeben:

$$\forall w(\exists x(p(w,x) \vee \forall y(q(w,x,y) \wedge \exists z\, r(y,z))))$$

Skolemisierung

Beispiel

Gegeben:

$\forall w(\exists x(p(w,x) \lor \forall y\,(q(w,x,y) \land \exists z\, r(y,z))))$

Pränexnormalform:

$\forall w \exists x \forall y \exists z((p(w,x) \lor (q(w,x,y) \land r(y,z))))$

Skolemisierung

Beispiel

Gegeben:

$\forall w(\exists x(p(w,x) \vee \forall y\,(q(w,x,y) \wedge \exists z\, r(y,z))))$

Pränexnormalform:

$\forall w \exists x \forall y \exists z((p(w,x) \vee (q(w,x,y) \wedge r(y,z))))$

Skolemisierung: $x \mapsto sk_x(w)$, $z \mapsto sk_z(w,y)$

$\forall w \forall y((p(w, sk_x(w)) \vee (q(w, sk_x(w), y) \wedge r(y, sk_z(w,y)))))$

Skolemisierung

Zusammen:

$$F \overset{*}{\Rightarrow}_P \underbrace{G}_{\text{pränexe Form}} \overset{*}{\Rightarrow}_S \underbrace{H}_{\text{pränex, kein } \exists}$$

Theorem:

Seien F, G und H wie oben angenommen. Dann:

(1) F und G sind äquivalent.

(2) G erfüllbar gdw. H erfüllbar

(bzgl. Σ-Str) (bzgl. Σ'-Str)

wobei $\Sigma' = (\Omega \cup SKF, \Pi)$, wenn $\Sigma = (\Omega, \Pi)$.

Skolemisierung

Lemma. Sei $G = \forall x_1, \dots, x_n \exists y\, G_1$ und $H = \forall x_1, \dots, x_n G_1[f(x_1, \dots, x_n)/y]$, wobei f ein neues Funktionssymbol (Skolemfunktion) ist.

G erfüllbar (bezgl. Σ-Str.) genau dann, wenn H erfüllbar (bezgl. Σ'-Str.).

wobei: $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und $\Sigma' = (\Omega \cup \{f\}, \Pi)$.

Beweis: (1) G erfüllbar $\Rightarrow$ H erfüllbar

Sei $\mathcal{A}$ eine Σ-Struktur und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A}(\beta)(G) = 1$.

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{A}(\beta)(G) &= \min_{a_1,\dots,a_n \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n])(\exists y G_1) \\ &= \min_{a_1,\dots,a_n \in U_{\mathcal{A}}} \max_{b \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) \end{aligned}$$

d.h. für alle $a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}$ es gibt ein $b \in U_{\mathcal{A}}$ mit:
$\mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) = 1$.

Wir definieren eine Σ'-struktur $\mathcal{A}'$, in der alle Funktionen und Prädikate in Σ wie in $\mathcal{A}$ definiert sind und in der wir für alle $a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}$, $f(a_1, \dots, a_n) := b$ definieren.

Dann $\mathcal{A}'(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n])(G_1[f(x_1, \dots, x_n)/y]) = 1$.

Skolemisierung

Lemma. Sei $G = \forall x_1, \dots, x_n \exists y G_1$ und $H = \forall x_1, \dots, x_n G_1[f(x_1, \dots, x_n)/y]$, wobei f ein neues Funktionssymbol (Skolemfunktion) ist.

G erfüllbar (bezgl. Σ-Str.) genau dann, wenn H erfüllbar (bezgl. Σ'-Str.).

wobei: $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und $\Sigma' = (\Omega \cup \{f\}, \Pi)$.

Beweis: (2) H erfüllbar $\Rightarrow$ G erfüllbar

Sei $\mathcal{A}'$ eine Σ'-Struktur und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}'}$ mit $\mathcal{A}'(\beta)(H) = 1$.

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{A}'(\beta)(H) &= \min_{a_1,\dots,a_n \in U_{\mathcal{A}'}} \mathcal{A}'(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n])(G_1[f(x_1, \dots, x_n)/y]) \\ &= \min_{a_1,\dots,a_n \in U_{\mathcal{A}'}} (\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto f_{\mathcal{A}'}(a_1, \dots, a_n)])(G_1) \end{aligned}$$

d.h. für alle $a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}'}$ es gibt ein $b = f_{\mathcal{A}'}(a_1, \dots, a_n) \in U_{\mathcal{A}'}$ mit:
$\mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) = 1.$

Dann gilt: $\mathcal{A}(\beta)(G) = \min_{a_1,\dots,a_n \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n])(\exists y G_1)$
$= \min_{a_1,\dots,a_n \in U_{\mathcal{A}}} \max_{b \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) = 1$

wobei $\mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}'$ ohne die Funktion f.

Skolemisierung

Theorem:

Seien F, G und H wie oben angenommen. Dann:

(1) F und G sind äquivalent.

(2) G erfüllbar gdw. H erfüllbar
(bzgl. Σ-Str) (bzgl. Σ'-Str)
wobei $\Sigma' = (\Omega \cup SKF, \Pi)$, wenn $\Sigma = (\Omega, \Pi)$.

Beweisidee: Die Lemma (auf Seiten 14-15) wird sukzessive für alle existentiell quantifizierten Variablen (von links nach rechts) angewandt.

Klauselnormalform (konjunktive Normalform)

Transformationsregeln $\Rightarrow_K$

(1)	$(F \leftrightarrow G)$	$\Rightarrow_K$	$(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$	
(2)	$(F \rightarrow G)$	$\Rightarrow_K$	$(\neg F \vee G)$	
(3)	$\neg(F \vee G)$	$\Rightarrow_K$	$(\neg F \wedge \neg G)$	
(4)	$\neg(F \wedge G)$	$\Rightarrow_K$	$(\neg F \vee \neg G)$	
(5)	$\neg\neg F$	$\Rightarrow_K$	F	
$(\neg\forall)$	$\neg\forall x F$	$\Rightarrow_K$	$\exists x \neg F$	
$(\neg\exists)$	$\neg\exists x F$	$\Rightarrow_K$	$\forall x \neg F$	(NNF)

(P) Pränex Normalform

(S) Skolemisierung

(6)	$(F \wedge G) \vee H$	$\Rightarrow_K$	$(F \vee H) \wedge (G \vee H)$	
(7)	$(F \wedge \top)$	$\Rightarrow_K$	F	
(8)	$(F \wedge \bot)$	$\Rightarrow_K$	$\bot$	
(9)	$(F \vee \top)$	$\Rightarrow_K$	$\top$	
(10)	$(F \vee \bot)$	$\Rightarrow_K$	F	(KNF)

Gesamtbild

$$\begin{array}{llll}
F & \overset{*}{\Rightarrow}_P & Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n \; G & (G \text{ quantorenfrei}) \\
 & \overset{*}{\Rightarrow}_S & \forall x_1, \ldots, x_m \; H & (H \text{ quantorenfrei}) \\
 & \overset{*}{\Rightarrow}_K & \underbrace{\underbrace{\forall x_1, \ldots, x_n}_{\text{weglassen}} \; \bigwedge_{i=1}^{k} \; \underbrace{\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij}}_{\text{Klauseln } C_i}}_{F'} &
\end{array}$$

$N = \{C_1, \ldots, C_k\}$ heißt Klausel(normal)form (KNF) von F.
Merke: Die Variablen in Klauseln sind implizit allquantifiziert.
Falls F freie Variablen enthält, werden diese Variablen mit Konstanten ersetzt
($F(x)$ erfüllbar gdw. $\exists x F(x)$ erfüllbar)

Theorem: F ist erfüllbar, gdw. F' erfüllbar, gdw. N erfüllbar.

Viel Optimierungspotential vorhanden, wenn nur Erfüllbarkeit bewahrt werden muß und kann: Größenexplosion, kleine Stelligkeit von Skolemfunktionen.

Beispiel

$$F := \exists z\Big(\big(\forall x(p(u, z, x))\big) \to \big(\forall y(q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))\big)\Big)$$

Beispiel

$$F := \exists z \Big(\big(\forall x(p(u,z,x))\big) \rightarrow \big(\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))\big) \Big)$$

Pränexnormalform:

$$\begin{aligned}
F &\equiv \exists z \Big((\neg \forall x p(u,z,x)) \vee \big(\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))\big) \Big) \\
&\equiv \exists z \Big(\big(\exists x \neg p(u,z,x)\big) \vee \big(\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))\big) \Big) && \text{(NNF)} \\
&\equiv \exists z \Big(\big(\exists x \neg p(u,z,x)\big) \vee \big(\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x_1 r(y,x_1)))\big) \Big) && \text{(Bereinigung)} \\
&\equiv \exists z \exists x \forall y \exists x_1 (\neg p(u,z,x) \vee (q(z,y) \wedge r(y,x_1))) && \text{(Pränexnormalform)}
\end{aligned}$$

Beispiel

$$F := \exists z\Big((\forall x(p(u,z,x))) \rightarrow (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))) \Big)$$

Pränexnormalform:

$$\begin{aligned}
F \quad &\equiv \quad \exists z\Big((\neg \forall x p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))) \Big) && \\
&\equiv \quad \exists z\Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))) \Big) && \text{(NNF)} \\
&\equiv \quad \exists z\Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x_1 r(y,x_1)))) \Big) && \text{(Bereinigung)} \\
&\equiv \quad \exists z \exists x \forall y \exists x_1 (\neg p(u,z,x) \vee (q(z,y) \wedge r(y,x_1))) && \text{(Pränexnormalform)}
\end{aligned}$$

Skolemisierung $u \mapsto sk_u,\ z \mapsto sk_z;\ x \mapsto sk_x;\ x_1 \mapsto sk_{x_1}(y)$

$$\Rightarrow_S^* \quad \forall y(\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee (q(sk_z, y) \wedge r(y, sk_{x_1}(y))))$$

(Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform)

Beispiel

$$F := \exists z\Big((\forall x(p(u,z,x))) \rightarrow (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))) \Big)$$

Pränexnormalform:

$$\begin{array}{lcll} F & \equiv & \exists z\Big((\neg\forall x p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))) \Big) & \\ & \equiv & \exists z\Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))) \Big) & \text{(NNF)} \\ & \equiv & \exists z\Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x_1 r(y,x_1)))) \Big) & \text{(Bereinigung)} \\ & \equiv & \exists z \exists x \forall y \exists x_1 (\neg p(u,z,x) \vee (q(z,y) \wedge r(y,x_1))) & \text{(Pränexnormalform)} \end{array}$$

Skolemisierung $u \mapsto sk_u$, $z \mapsto sk_z$; $x \mapsto sk_x$; $x_1 \mapsto sk_{x_1}(y)$

$$\Rightarrow^*_S \quad \forall y(\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee (q(sk_z, y) \wedge r(y, sk_{x_1}(y))))$$

(Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform)

Klauselnormalform:

$$\Rightarrow^*_K \quad \forall y((\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee q(sk_z, y)) \wedge (\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee r(y, sk_{x_1}(y))))$$

Klauselmenge: $N = \{\{\neg p(sk_u, sk_z, sk_x), q(sk_z, y)\}, \{\neg p(sk_u, sk_z, sk_x), r(y, sk_{x_1}(y))\}\}$

Zusammenfassung

Normalformen

- NNF
- Pränexe Normalform
- Skolemnormalform
- Klauselnormalform

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Resolution für Grundklauseln (Mengennotation)

Aussagenlogische Klauseln entsprechen Grundklauseln und umgekehrt.

Resolutionsregel:

$$\frac{C \cup \{A\} \qquad \{\neg A\} \cup D}{C \cup D}$$

$C \cup D$: Resolvente

A: resolviertes Atom

Beispielrefutation (Mengennotation)

1.	$\{\neg P(f(a)),\quad Q(b)\}$	(gegeben)
2.	$\{P(f(a)),\quad Q(b)\}$	(gegeben)
3.	$\{\neg P(g(b,a)),\quad \neg Q(b)\}$	(gegeben)
4.	$\{P(g(b,a))\}$	(gegeben)
5.	$\{Q(b)\}$	(Res. 2. in 1.)
6.	$\{\neg P(g(b,a))\}$	(Res. 5. in 3.)
8.	$\perp$	(Res. 4. in 6.)

Resolution für Grundklauseln (Klauselnotation)

Resolutionsregel:

$$\frac{C \vee A \qquad \neg A \vee D}{C \vee D}$$

$C \vee D$: Resolvente

A: resolviertes Atom

Faktorisieren:

$$\frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}$$

„$\vee$“ wird in Klauseln als assoziativ und kommutativ aufgefaßt.

Beispielrefutation (Klauselnotation)

1.	$\neg P(f(a)) \vee \neg P(f(a)) \vee Q(b)$	(gegeben)
2.	$P(f(a)) \vee Q(b)$	(gegeben)
3.	$\neg P(g(b, a)) \vee \neg Q(b)$	(gegeben)
4.	$P(g(b, a))$	(gegeben)
5.	$\neg P(f(a)) \vee Q(b) \vee Q(b)$	(Res. 2. in 1.)
6.	$\neg P(f(a)) \vee Q(b)$	(Fakt. 5.)
7.	$Q(b) \vee Q(b)$	(Res. 2. in 6.)
8.	$Q(b)$	(Fakt. 7.)
9.	$\neg P(g(b, a))$	(Res. 8. in 3.)
10.	$\perp$	(Res. 4. in 9.)

Korrektheit und Vollständigkeit

Aussagenlogische Resolution ist korrekt und vollständig.

- Mengennotation: Resolutionsregel
- Klauselnotation: Resolutionsregel + Faktorisieren

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt)
  $\mapsto$ ggf. umbenennen
- $\sigma(L) = \sigma(L')$

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt) $\mapsto$ ggf. umbenennen
- $\sigma(L) = \sigma(L')$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$
Idee: Wähle die "allgemeinste" Substitution, mit $\sigma(L) = \sigma(L')$

Beispiel

$$\frac{\{p(x,f(x)),q(f(x))\} \qquad\qquad \{\neg r(f(y)),\neg q(y)\}}{\{p(x,f(x))\sigma,\neg r(f(y))\sigma\}}$$

$L = q(f(x)), L' = q(y)$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$:

σ_1 $\quad$ $\sigma_1(x) = a$, $\sigma_1(y) = f(a)$

σ_1 $\quad$ $\sigma_1(x) = f(a)$, $\sigma_1(y) = f(f(a))$

$\dots$

Beispiel

$$\frac{\{p(x,f(x)), q(f(x))\} \qquad\qquad \{\neg r(f(y)), \neg q(y)\}}{\{p(x,f(x))\sigma, \neg r(f(y))\sigma\}}$$

$L = q(f(x))$, $L' = q(y)$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$:

$\sigma_1 \qquad \sigma_1(x) = a,\ \sigma_1(y) = f(a)$

$\sigma_1 \qquad \sigma_1(x) = f(a),\ \sigma_1(y) = f(f(a))$

$\dots$

Idee: Wähle die "allgemeinste" Substitution, mit $\sigma(L) = \sigma(L')$

$q(f(x)) \stackrel{?}{=} q(y) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \stackrel{?}{=} y \qquad \Rightarrow \qquad y \stackrel{?}{=} f(x)$

$\sigma = [f(x)/y] \qquad \sigma(y) = f(x),\ \sigma(z) = z$ for $z \neq y$.

Unifikation

Sei $E = \{s_1 \stackrel{?}{=} t_1, \ldots, s_n \stackrel{?}{=} t_n\}$ (s_i, t_i Terme oder Atome) eine Menge von Gleichheitsproblemen.

Definition: Eine Substitution σ heißt ein Unifikator von E g.d.w.

$$\forall 1 \leq i \leq n : s_i\sigma = t_i\sigma.$$

Existiert ein Unifikator, so heißt E unifizierbar.

Definition: σ heißt allgemeiner als τ

$$\sigma \leq \tau \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt Subst.} \varrho : \sigma \circ \varrho = \tau$$

wobei $(\sigma \circ \varrho)(x) := (x\sigma)\varrho$ die Komposition von σ und ϱ als Abbildungen.[a]

[a] Ist wohldefiniert, weil $\sigma \circ \varrho$ einen endlichen Bereich hat.

Beispiel

$E = \{q(f(x)) \stackrel{?}{=} q(y)\}$

$\sigma_1 = [a/x, f(a)/y]$ ist ein Unifikator von E

$\sigma_2 = [f(a)/x, f(f(a))/y]$ ist ein Unifikator von E

$\sigma = [f(x)/y]$ ist ein Unifikator von E

σ ist allgemeiner als σ_1 und als σ_2:

$\sigma_1 = \sigma \circ [a/x]$

$$\sigma \circ [a/x](y) = \sigma(y)[a/x] = f(x)[a/x] = f(a)$$
$$\sigma \circ [a/x](x) = \sigma(x)[a/x] = x[a/x] = a$$

$\sigma_2 = \sigma \circ [f(a)/x]$

$$\sigma \circ [f(a)/x](y) = \sigma(y)[f(a)/x] = f(x)[f(a)/x] = f(f(a))$$
$$\sigma \circ [f(a)/x](x) = \sigma(x)[f(a)/x] = x[f(a)/x] = f(a)$$

Ein paar simple Fakten

- Jeder Term ist mit sich selbst unifizierbar (mittels id)
- Terme der Gestalt $f(s_1, \ldots, s_n)$, $f(t_1, \ldots, t_n)$ sind unifizierbar g.d.w. si und t_i unifizierbar für $1 \leq i \leq n$
- Atome der Gestalt $p(s_1, \ldots, s_n)$, $p(t_1, \ldots, t_n)$ sind unifizierbar g.d.w. si und t_i unifizierbar für $1 \leq i \leq n$
- Terme der Gestalt $f(s_1, \ldots, s_n)$, $g(t_1, \ldots, t_m)$ sind niemals unifb.
- Atome der Gestalt $p(s_1, \ldots, s_n)$, $q(t_1, \ldots, t_n)$ sind niemals unifb.
- Eine Variable x und ein Term t, der x nicht enthält, sind immer unifb. (mittels $[t/x]$)
- Eine Variable x und ein Term $t \neq x$, der x enthält, sind niemals unifizierbar

Unifikation nach Martelli/Montanari

$$
\begin{array}{lrll}
(1) & t \stackrel{?}{=} t, E & \Rightarrow_{MM} & E \\
(2) & f(s_1, \ldots, s_n) \stackrel{?}{=} f(t_1, \ldots, t_n), E & \Rightarrow_{MM} & s_1 \stackrel{?}{=} t_1, \ldots, s_n \stackrel{?}{=} t_n, E \\
(3) & f(\ldots) \stackrel{?}{=} g(\ldots), E & \Rightarrow_{MM} & \perp \\
(4) & x \stackrel{?}{=} t, E & \Rightarrow_{MM} & x \stackrel{?}{=} t, E[t/x] \\
 & & & \text{falls } x \in var(E), x \notin var(t) \\
(5) & x \stackrel{?}{=} t, E & \Rightarrow_{MM} & \perp \\
 & & & \text{falls } x \neq t, x \in var(t) \\
(6) & t \stackrel{?}{=} x, E & \Rightarrow_{MM} & x \stackrel{?}{=} t, E \\
 & & & \text{falls } t \notin X
\end{array}
$$

Beispiel 1

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(x,g(v,w)), f(x,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} x, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), {\color{red}x} \stackrel{?}{=} g({\color{red}x},a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(5)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \perp$$

Beispiel 2

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} g(x,g(v,w)), f(x,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(3)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \perp$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\Rightarrow^{*}_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} && \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\} \\
&\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, \color{red}{v \stackrel{?}{=} v}, w \stackrel{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}
\end{aligned}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} && \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\} \\
&\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b) \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,a), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} b, a \stackrel{?}{=} a, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,a), y \stackrel{?}{=} v, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}
\end{aligned}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \overset{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \overset{?}{=} f(g(x,a),g(v,b))\}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \overset{?}{=} z, g(y,b) \overset{?}{=} g(v,w), z \overset{?}{=} g(x,a), g(v,w) \overset{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{z \overset{?}{=} g(a,x), g(y,b) \overset{?}{=} g(v,w), g(a,x) \overset{?}{=} g(x,a), g(v,w) \overset{?}{=} g(v,b)$$

$$\Rightarrow^*_{MM} \quad \{z \overset{?}{=} g(a,x), y \overset{?}{=} v, b \overset{?}{=} w, a \overset{?}{=} x, x \overset{?}{=} a, v \overset{?}{=} v, w \overset{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow^*_{MM} \quad \{z \overset{?}{=} g(a,x), y \overset{?}{=} v, b \overset{?}{=} w, a \overset{?}{=} x, x \overset{?}{=} a, w \overset{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow^*_{MM} \quad \{z \overset{?}{=} g(a,a), y \overset{?}{=} v, b \overset{?}{=} b, a \overset{?}{=} a, x \overset{?}{=} a, w \overset{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow^*_{MM} \quad \{z \overset{?}{=} g(a,a), y \overset{?}{=} v, x \overset{?}{=} a, w \overset{?}{=} b\}$$

Allgemeinster Unifikator:

$$[g(a,a)/z, v/y, a/x, b/w]$$

Vorsicht: a, b sind Konstanten. $[g(a,a)/z, v/y, x/a, w/b]$ ist keine Substitution!