Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 2

19.04.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

Aussagenlogik

- Beispiele
- Syntax (Formeln)

Vokabular der Aussagenlogik

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Pi = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Pi = \{P_0, P_1, \ldots\}$$

Bezeichnungen für Symbole in Π

- atomare Aussagen
- Atome
- Aussagenvariablen

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge For_Π der Formeln über Π:

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \mathrm{For}_\Pi$ und $\bot \in \mathrm{For}_\Pi$
- $\Pi \subseteq \mathrm{For}_\Pi$
- Wenn $F, G \in \mathrm{For}_\Pi$, dann auch

  $$\neg F, (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$$

  Elemente von For_Π.

Syntax: Beispiel

"Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?",
wurde ein 100 Jähriger gefragt.

"Ich halte mich streng an die Diätregeln:

- Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke,
  dann habe ich immer Fisch.
- Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe,
  verzichte ich auf Eiscreme.
- Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide,
  dann rühre ich Fisch nicht an."

Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

- $\neg B \rightarrow F$

Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

- $\neg B \rightarrow F$

Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme.

- $F \wedge B \rightarrow \neg E$

Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

- $\neg B \rightarrow F$

Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme.

- $F \wedge B \rightarrow \neg E$

Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.

- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Beispiel 1

- $\neg B \rightarrow F$
- $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Beispiel 1

- $\neg B \rightarrow F$
- $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.:

- kein Bier, Fisch und Eiscreme
  erfüllt 3. Diätregel nicht!
- Bier, Fisch, keine Eiscreme
  erfüllt alle Diätregeln

Beispiel 1

- $\neg B \rightarrow F$
- $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.: **Formalisierung:**

- kein Bier, Fisch und Eiscreme — $B \mapsto$ falsch, $F \mapsto$ wahr, $E \mapsto$ wahr
  erfüllt 3. Diätregel nicht!
- Bier, Fisch, keine Eiscreme — $B \mapsto$ wahr, $F \mapsto$ wahr, $E \mapsto$ falsch
  erfüllt alle Diätregeln

Beispiel 1

- $\neg B \rightarrow F$
- $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.: **Formalisierung:**

0:falsch, 1:wahr $\quad \mathcal{A} : \{B, F, E\} \rightarrow \{0, 1\}$

- kein Bier, Fisch und Eiscreme $\quad \mathcal{A}(B) = 0, \mathcal{A}(F) = 1, \mathcal{A}(E) = 1$
  erfüllt 3. Diätregel nicht!
- Bier, Fisch, keine Eiscreme $\quad \mathcal{A}(B) = 1, \mathcal{A}(F) = 1, \mathcal{A}(E) = 0$
  erfüllt alle Diätregeln

Letztes Mal

Aussagenlogik

- Syntax: welche Formeln?
- Semantik: Modelle (Strukturen)

  Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?
- Deduktionsmechanismus: Ableitung neuer wahrer Formeln

Semantik der Aussagenlogik

Π eine aussagenlogische Signatur

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

1 Symbol für den Wahrheitswert "wahr"

0 Symbol für den Wahrheitswert "falsch"

Semantik der Aussagenlogik

Π eine aussagenlogische Signatur

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Eine Valuation (Wertebelegung) ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$$

Wir werden Wertebelegungen auch Aussagenlogische Strukturen, Aussagenlogische Modelle oder Interpretationen nennen.

Semantik der Aussagenlogik

Π eine aussagenlogische Signatur

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Eine Wertebelegung ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$$

Beispiel:

A	B	C
0	1	0

(Bei drei Symbolen gibt es 8 mögliche Modelle)

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_\Pi \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : \mathit{For}_\Pi \to \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\bot) = 0$$
$$\mathcal{A}^*(\top) = 1$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : \mathit{For}_\Pi \to \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\bot) = 0$$

$$\mathcal{A}^*(\top) = 1$$

$$\mathcal{A}^*(P) = \mathcal{A}(P)$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_{\Pi} \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\neg F) = \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F) = 1 \\ 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F) = 0 \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : \mathit{For}_\Pi \to \{0,1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(F_1 \wedge F_2) = \begin{cases} 0 & \mathit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \\ 1 & \mathit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_\Pi \to \{0,1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(F_1 \wedge F_2) = \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \\ 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{A}^*(F_1 \vee F_2) = \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \\ 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_\Pi \to \{0,1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(F_1 \to F_2) = \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \\ 0 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 1 \text{ und } \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{A}^*(F_1 \leftrightarrow F_2) = \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

P	$\neg P$
0	1
1	0

Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

P	$\neg P$
0	1
1	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

P	$\neg P$
0	1
1	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ eine Π-Valuation.
$\mathcal{A}^* : \mathit{For}_\Pi \to \{0, 1\}$ wird induktiv über Aufbau von F wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^*(\bot) &= 0 \\
\mathcal{A}^*(\top) &= 1 \\
\mathcal{A}^*(P) &= \mathcal{A}(P) \\
\mathcal{A}^*(\neg F) &= 1 - \mathcal{A}^*(F) \\
\mathcal{A}^*(F \rho G) &= \mathrm{B}_\rho(\mathcal{A}^*(F), \mathcal{A}^*(G)) \\
&\quad \mathrm{B}_\rho(x, y) \text{ berechnet entschpr. der Wahrheitstafel für } \rho \\
&\quad z.B. : \mathrm{B}_\vee(0, 1) = (0 \vee 1) = 1; \mathrm{B}_\to(1, 0) = (1 \to 0) = 0
\end{aligned}$$

Wir schreiben normalerweise $\mathcal{A}$ statt $\mathcal{A}^*$.

Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1, \mathcal{A}(Q) = 0, \mathcal{A}(R) = 1$.

$$\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to R)$$

Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1, \mathcal{A}(Q) = 0, \mathcal{A}(R) = 1$.

$$\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to R) \quad = \quad \mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to \mathcal{A}^*(R)$$

Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1, \mathcal{A}(Q) = 0, \mathcal{A}(R) = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to R) \quad &= \quad \mathcal{A}^*(P \wedge (Q \vee \neg P) \to \mathcal{A}^*(R) \\
&= \quad (\mathcal{A}^*(P) \wedge \mathcal{A}^*(Q \vee \neg P)) \to \mathcal{A}^*(R)
\end{aligned}$$

Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1, \mathcal{A}(Q) = 0, \mathcal{A}(R) = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to R) &= \mathcal{A}^*(P \wedge (Q \vee \neg P) \to \mathcal{A}^*(R) \\
&= (\mathcal{A}^*(P) \wedge \mathcal{A}^*(Q \vee \neg P)) \to \mathcal{A}^*(R) \\
&= (\mathcal{A}(P) \wedge (\mathcal{A}(Q) \vee \neg \mathcal{A}(P))) \to \mathcal{A}(R) \\
&= (1 \wedge (0 \vee \neg 1)) \to 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Beispiel 1

- $\neg B \rightarrow F$
- $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Menü **Formalisierung:**

$$\mathcal{A} : \{B, F, E\} \rightarrow \{0, 1\}$$

kein Bier, Fisch und Eiscreme $\mathcal{A}(B) = 0, \mathcal{A}(F) = 1, \mathcal{A}(E) = 1$

erfüllt 3. Diätregel nicht!

$$\begin{array}{lll}
1. & \mathcal{A}(\neg B \rightarrow F) & = \neg\mathcal{A}(B) \rightarrow \mathcal{A}(F) = \neg 0 \rightarrow 1 = 1 \rightarrow 1 = 1 \\
2. & \mathcal{A}(F \wedge B \rightarrow \neg E) & = \mathcal{A}(F) \wedge \mathcal{A}(B) \rightarrow \neg\mathcal{A}(E) \\
 & & = (1 \wedge 0) \rightarrow \neg 1 = 0 \rightarrow 0 = 1 \\
3. & \mathcal{A}(E \wedge \neg B \rightarrow \neg F) & = (\mathcal{A}(E) \wedge \neg\mathcal{A}(B)) \rightarrow \neg\mathcal{A}(F) \\
 & & = (1 \wedge \neg 0) \rightarrow \neg 1 = 1 \rightarrow 0 = 0
\end{array}$$

Wahrheitstabellen: Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Wahrheitstabellen: Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	
0	0	1	1	0	0	
0	1	0	0	1	1	
0	1	1	1	0	1	
1	0	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	
1	1	1	1	0	1	

Wahrheitstabellen: Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Modell einer Formel(menge)

Definition: Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formel $F \in \mathsf{For}_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1.$$

Modell einer Formel(menge)

Definition: Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formel $F \in \mathsf{For}_{\Pi}$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1.$$

Definition: Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formelmenge $M \subseteq \mathsf{For}_{\Pi}$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1 \text{ für alle } F \in M$$

Modell einer Formel(menge)

Definition: Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formel $F \in For_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1.$$

Definition: Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formelmenge $M \subseteq For_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1 \text{ für alle } F \in M$$

Notation:

$\mathcal{A} \models F$

$\mathcal{A} \models M$

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Sei $\mathcal{A} : \{A, B, C\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0, \mathcal{A}(B) = 1, \mathcal{A}(C) = 1$.

$\mathcal{A} \models (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

$\mathcal{A} \models \{(A \vee C), (B \vee \neg C)\}$

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Definition: F gilt in $\mathcal{A}$ (oder $\mathcal{A}$ ist Modell von F) gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$.

Notation: $\mathcal{A} \models F$

Definition: F ist (allgemein-) gültig (oder eine Tautologie)
gdw.: $\mathcal{A} \models F$, für alle $A : \Pi \to \{0, 1\}$

Notation: $\models F$

Definition: F heißt erfüllbar gdw. es $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gibt, so dass $\mathcal{A} \models F$.

Sonst heißt F unerfüllbar (oder eine Kontradiktion).

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

F ist nicht allgemeingültig:

$\mathcal{A}_1(F) = 0$ für $\mathcal{A}_1 : \{A, B, C\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(C) = 0$.

F ist erfüllbar (also ist F nicht unerfüllbar):

$\mathcal{A}_2(F) = 1$ für $\mathcal{A} : \{A, B, C\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0, \mathcal{A}(B) = 1, \mathcal{A}(C) = 1$.

Tautologien und Kontradiktionen

Tautologien: Formel, die stets wahr sind.

Beispiele: $p \vee (\neg p)$ (Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten)
(Tertium non datur)

$p \leftrightarrow \neg\neg p$ (Prinzip der doppelten Negation)

Kontradiktionen: Formel, die stets falsch sind.

Beispiel: $p \wedge \neg p$

- Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion
- Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie

Beispiele

Die folgenden Formeln sind Tautologien:

(1) $(p \to \neg p) \to (\neg p)$

(2) $(p \wedge (p \to q)) \to q$

(3) $(p \wedge q) \to p$

$(p \wedge q) \to q$

(4) $p \to (p \vee q)$

$q \to (p \vee q)$

(5) $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$

(6) $(((p \to q) \wedge (q \to r)) \wedge p) \to r$

Bis jetzt

Eine Formel F ist:

- erfüllbar, wenn es eine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 1$.
- unerfüllbar, wenn für alle Wertebelegungen $\mathcal{A} : \Pi \to$, $\mathcal{A}(F) = 0$.

Bis jetzt

Eine Formelmenge N ist:

- erfüllbar, wenn es eine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gibt, für die alle Formeln in N wahr sind (d.h. mit $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle $F \in N$).
- unerfüllbar, wenn es keine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow$ gibt, für die alle Formeln in N wahr sind (d.h. es gibt keine Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle $F \in N$).

Bis jetzt

Eine Formelmenge N ist:

- erfüllbar, wenn es eine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gibt, für die alle Formeln in N wahr sind (d.h. mit $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle $F \in N$).
- unerfüllbar, wenn es keine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \to$ gibt, für die alle Formeln in N wahr sind (d.h. es gibt keine Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle $F \in N$).

Beispiel

$N = \{P \wedge Q, \neg Q \vee R\}$ ist erfüllbar:

Für $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(R) = 1$ gilt:
$\mathcal{A}(P \wedge Q) = 1$ und $\mathcal{A}(\neg Q \vee R) = 1$ (alle Formeln in N sind wahr in $\mathcal{A}$).

$N = \{P \wedge Q, \neg Q \wedge R\}$ ist nicht erfüllbar (unerfüllbar):

Für jede Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(P \wedge Q) = 1$, ist $\mathcal{A}(Q) = 1$
Für jede Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(\neg Q \wedge R) = 1$, ist $\mathcal{A}(Q) = 0$.

Es kann keine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ geben mit
$\mathcal{A}(P \wedge Q) = 1$ und $\mathcal{A}(\neg Q \wedge R) = 1$.

Folgerung und Äquivalenz

Definition: F impliziert G (oder G folgt aus F),

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: Wenn $\mathcal{A} \models F$, dann $\mathcal{A} \models G$.

Notation: $F \models G$

Definition: F und G sind äquivalent

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: $\mathcal{A} \models F$ gdw. $A \models G$.

Notation: $F \equiv G$.

Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise, z.B.:

$N \models G$ gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt:
falls $\mathcal{A} \models F$, für alle $F \in N$,
so $\mathcal{A} \models G$.

Folgerung und Äquivalenz

Intuition:

- F impliziert G (oder G folgt aus F),
  gdw.: für jede Wertebelegung, für die F wahr ist, auch G wahr ist.

- Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise, z.B.:
  $N \models G$ gdw.: für alle Wertebelegungen, für denen alle Formeln in N wahr sind, ist G auch wahr.

- Zwei Formeln F und G sind logisch äquivalent (Notation: $F \equiv G$) wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind

Beispiel: $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (Kontraposition)

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	0	0	1	0	
0	0	1	1	0	0	
0	1	0	0	1	0	
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	

Beispiel

$F = (A \lor C) \land (B \lor \neg C) \qquad G = (A \lor B)$

Überprüfe, ob $F \models G$

A	B	C	$(A \lor C)$	$(B \lor \neg C)$	$(A \lor C) \land (B \lor \neg C)$	$(A \lor B)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$: Ja, $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$: Ja, $F \models G$

.... aber es ist nicht wahr dass $G \models F$ (Notation: $G \not\models F$)

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

Tautologien und Kontradiktionen

Tautologien, allgemeingültige Formeln:

Formeln, die stets wahr sind.

Kontradiktionen, unerfüllbare Formeln:

Formel, die stets falsch sind.

- Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion
- Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Beweis 1: Aus der Wahrheitstafel.

Beweis 2: F allgemeingültig gdw. $\mathcal{A}(F)=1$ für alle $\mathcal{A}:\Pi\rightarrow\{0,1\}$

gdw. $\mathcal{A}(\neg F)=0$ für alle $\mathcal{A}:\Pi\rightarrow\{0,1\}$ gdw. $\neg F$ unerfüllbar

Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln

Theorem. $F \models G$ gdw. $\models F \to G$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
F \models G \quad & \text{g.d.w.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}, \text{ falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ so } \mathcal{A}(G) = 1 \\
& \text{g.d.w.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}, \ (\mathcal{A}(F) \to \mathcal{A}(G)) = 1 \\
& \text{g.d.w.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}, \ \mathcal{A}(F \to G) = 1 \\
& \text{g.d.w.} \quad \models F \to G
\end{aligned}$$

Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Beweis: "$\Rightarrow$"

Annahme: $N \cup \{F\} \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}$:$\Pi \rightarrow \{0, 1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H)$=1 für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$] so $\mathcal{A}(G)$=1.

Wir beweisen, dass $N \models F \rightarrow G$, d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$
falls [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$] so $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$.

Fall 1: $\mathcal{A}(F) = 0$. Dann $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Fall 2: $\mathcal{A}(F) = 1$, d.h. [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$]. Dann
$\mathcal{A}(G) = 1$ und somit $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Beweis: "$\Leftarrow$"

Annahme: $N \models F \rightarrow G$ d.h. für alle $\mathcal{A}$:$\Pi \rightarrow \{0, 1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H)$=1 für alle Formeln $H \in N$] so $\mathcal{A}(F \rightarrow G)$=1.

Wir beweisen, dass $N \cup \{F\} \models G$, d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$
falls [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$] so $\mathcal{A}(G) = 1$.

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$.

Dann (i) $\mathcal{A}(F) = 1$ und
(ii) [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$], also $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Es folgt, dass $1 = \mathcal{A}(F \rightarrow G) = (\mathcal{A}(F) \rightarrow \mathcal{A}(G)) = (1 \rightarrow \mathcal{A}(G)) = \mathcal{A}(G)$,
so $\mathcal{A}(G) = 1$.

Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln.

Theorem. $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

Beweis:

$$
\begin{array}{rl}
F \equiv G & \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\},\ \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) \\
& \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\},\ (\mathcal{A}(F) \leftrightarrow \mathcal{A}(G)) = 1 \\
& \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\},\ \mathcal{A}(F \leftrightarrow G) = 1 \\
& \text{g.d.w. } \models F \leftrightarrow G
\end{array}
$$

Allgemeingültigkeit/Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $F \models G$ gdw. $\models F \to G$.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \to G$.

Theorem. $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln.

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Beweis F wahr für jede Wertebelegung gdw. $\neg F$ falsch für jede Wertebelegung.

Theorem. $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Beweis:

$$
\begin{array}{lll}
F \models G & \text{gdw.} & \models F \to G \quad \text{d.h. } F \to G \text{ allgemeingültig} \\
 & \text{gdw.} & \neg(F \to G) \text{ unerfüllbar.} \\
 & \text{gdw.} & F \wedge \neg G \text{ unerfüllbar.}
\end{array}
$$

... da $\neg(F \to G) \equiv \neg(\neg F \vee G) \equiv \neg\neg F \wedge \neg G \equiv F \wedge \neg G$.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Beweis: "$\Rightarrow$"

Annahme: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\rightarrow}\{0,1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$] so $\mathcal{A}(G){=}1$.

Zu zeigen: $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar.

Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, $N \cup \{\neg G\}$ erfüllbar, d.h. es gibt $\mathcal{A}{:}\Pi{\rightarrow}\{0,1\}$, mit

[$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N \cup \{\neg G\}$].

Dann [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$] und $\mathcal{A}(\neg G) = 1$ (d.h. $\mathcal{A}(G) = 0$). Widerspruch.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Beweis: "$\Leftarrow$"

Annahme: $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar.

Zu zeigen: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\rightarrow}\{0,1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$] so $\mathcal{A}(G){=}1$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}{:}\Pi{\rightarrow}\{0,1\}$, mit [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$].

Falls $\mathcal{A}(G) = 0$, wäre $\mathcal{A}$ ein Modell für $N \cup \{\neg G\}$. Das ist aber unmöglich, da wir angenommen haben, dass $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Es folgt, dass $\mathcal{A}(G) = 1$.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Theorem. $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Nota bene: falls N unerfüllbar, so $N \models G$ für jede Formel G
... auch für $\perp$.

Notation: $N \models \perp$ für N unerfüllbar.