

Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 3

24.04.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- **Syntax** (Formeln)

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

\top Symbol für die Formel “wahr”

\perp Symbol für die Formel “falsch”

\neg Negationssymbol (“nicht”)

\wedge Konjunktionssymbol (“und”)

\vee Disjunktionssymbol (“oder”)

\rightarrow Implikationssymbol (“wenn . . . dann”)

\leftrightarrow Symbol für Äquivalenz (“genau dann, wenn”)

() die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Pi = \{P_0, \dots, P_n\}$$

oder

$$\Pi = \{P_0, P_1, \dots\}$$

Bezeichnungen für Symbole in Π

- atomare Aussagen
- Atome
- Aussagenvariablen

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge For_Π der Formeln über Π :

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \text{For}_\Pi$ und $\perp \in \text{For}_\Pi$
- $\Pi \subseteq \text{For}_\Pi$
- Wenn $F, G \in \text{For}_\Pi$, dann auch

$$\neg F, (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$$

Elemente von For_Π .

Bis jetzt

- **Syntax** (Formeln)

- **Semantik**

Wertebelegungen (Valuationen, Modelle)

Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen

Modell einer Formel(menge)

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Tautologien und Kontradiktionen

Folgerung und Äquivalenz

Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Allgemeingültigkeit / Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $F \models G$ gdw. $\models F \rightarrow G$.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Theorem. $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

Unerfüllbarkeit / Allgemeingültigkeit / Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Theorem. $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Nota bene: falls N unerfüllbar, so $N \models G$ für jede Formel G
... auch für \perp .

Notation: $N \models \perp$ für N unerfüllbar.

Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Erfüllbarkeitstest:

Jede Formel F enthält endlich viele Aussagenvariablen.

$\mathcal{A}(F)$ ist nur von den Werten dieser Aussagenvariablen abhängig.

F enthält n Aussagenvariablen:

⇒ 2^n Wertbelegungen notwendig um zu überprüfen,
ob F erfüllbar ist oder nicht.

⇒ Wahrheitstafel

⇒ Das Erfüllbarkeitsproblem ist entscheidbar

Es existieren viel bessere Methoden als Wahrheitstafeltests um die Erfüllbarkeit einer Formel zu überprüfen.

Ein zweiter Kalkül

Ein zweiter Kalkül: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel

Äquivalenz

Zwei Formeln F und G sind **logisch äquivalent** (Notation: $F \equiv G$) wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind

Beispiel: $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (Kontraposition)

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$$(F \wedge F) \equiv F$$

$$(F \vee F) \equiv F$$

(Idempotenz)

$$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$$

$$(F \vee G) \equiv (G \vee F)$$

(Kommutativität)

$$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$$

$$(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H)$$

(Assoziativität)

$$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$$

$$(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$$

(Absorption)

$$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$$

$$(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$$

(Distributivität)

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$$(\neg\neg F) \equiv F \quad (\text{Doppelte Negation})$$

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$$

(De Morgan's Regeln)

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$$

(Kontraposition)

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$$

(Elimination Implikation)

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$

(Elimination Äquivalenz)

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$$(F \wedge G) \equiv F, \text{ falls } G \text{ Tautologie}$$

$$(F \vee G) \equiv \top, \text{ falls } G \text{ Tautologie} \quad (\text{Tautologieregeln})$$

$$(F \wedge G) \equiv \perp, \text{ falls } G \text{ unerfüllbar}$$

$$(F \vee G) \equiv F, \text{ falls } G \text{ unerfüllbar} \quad (\text{Tautologieregeln})$$

Wichtige Äquivalenzen mit \top/\perp

$$(A \wedge \neg A) \equiv \perp$$

$$(A \vee \neg A) \equiv \top$$

(Tertium non datur)

$$(A \wedge \top) \equiv A$$

$$(A \wedge \perp) \equiv \perp$$

Wichtige Äquivalenzen (Zusammengefasst)

$$(F \wedge F) \equiv F \quad (F \vee F) \equiv F \quad (\text{Idempotenz})$$

$$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F) \quad (F \vee G) \equiv (G \vee F) \quad (\text{Kommutativität})$$

$$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$$

$$(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H) \quad (\text{Assoziativität})$$

$$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$$

$$(F \vee (F \wedge G)) \equiv F \quad (\text{Absorption})$$

$$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$$

$$(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) \quad (\text{Distributivität})$$

$$(\neg\neg F) \equiv F \quad (\text{Doppelte Negation})$$

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G) \quad (\text{De Morgan's Regeln})$$

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F) \quad (\text{Kontraposition})$$

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G) \quad (\text{Elimination Implikation})$$

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \quad (\text{Elimination Äquivalenz})$$

Terminologie

Eine Formel F , die als Teil einer Formel G auftritt, heißt **Teilformel** von G .

- F ist eine Teilformel von F

- $F = \neg G$ und H Teilformel von G $\left. \vphantom{\begin{matrix} F = \neg G \\ H \text{ Teilformel von } G \end{matrix}} \right\} \rightarrow H$ Teilformel von F

- $F = F_1 \rho F_2$
(wo $\rho \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$)
 H Teilformel von F_1 oder F_2 $\left. \vphantom{\begin{matrix} F = F_1 \rho F_2 \\ (wo \rho \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}) \\ H \text{ Teilformel von } F_1 \text{ oder } F_2 \end{matrix}} \right\} \rightarrow H$ Teilformel von F

Substitutionstheorem

Theorem.

Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F .

Dann ist H äquivalent zu H' , wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird.

Beispiel:

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

impliziert

$$(C \wedge (A \vee B)) \equiv (C \wedge (B \vee A))$$

Strukturelle Induktion

Menge aller aussagenlogischen Formeln For_Π , wobei $\Pi = \{P_0, P_1, \dots\}$

Basismenge: $\top, \perp; P_0, P_1, P_2, \dots$ sind aussagenlogische Formeln (atomare Formeln)

Erzeugungsregel: Wenn F_1, F_2 aussagenlogische Formeln sind, dann sind auch

$\neg F_1, F_1 \wedge F_2, F_1 \vee F_2, F_1 \rightarrow F_2, F_1 \leftrightarrow F_2$ aussagenlogische Formeln

For_Π kleinste Menge, die:

- \top, \perp und Π enthält
- zusammen mit F auch $\neg F$ enthält
- zusammen mit F_1, F_2 auch $F_1 \text{op} F_2$ enthält ($\text{op} \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)

Gelten die beiden Aussagen:

- $p(A)$ für alle atomaren Formeln $A \in \{\top, \perp\} \cup \Pi$
- $\forall F \in \text{For}_\Pi : (\text{Falls } (F = \neg F_1 \text{ und } p(F_1)) \text{ dann } p(F));$
(Falls $(F = F_1 \text{op} F_2 \text{ und } p(F_1) \text{ und } p(F_2))$ dann $p(F)$)

dann gilt auch $\forall F \in \text{For}_\Pi : p(F)$.

Substitutionstheorem

Theorem.

Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F .

Dann ist H äquivalent zu H' , wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird. $p(H)$

Beweis: Strukturelle Induktion.

Induktionsbasis: Beweisen, dass $p(H)$ für alle Formeln H in $\{\perp, \top\} \cup \Pi$ gilt.

Beweis: Falls $H \in \{\perp, \top\} \cup \Pi$ und F Teilformel von H , so muss $F = H$ sein. Dann ist die Formel H' , die aus H hervorgeht, indem F (= die ganze Formel H) durch G ersetzt wird, gleich G .

Aber dann: $H = F \equiv G = H'$.

Substitutionstheorem

Beweis: (Fortsetzung)

Sei H eine Formel, $H \notin \{\perp, \top\} \cup \Pi$. Sei F eine Teilformel von H .

Fall 1: $F = H$. Dann $H' = G$ (wie vorher), so $H = F \equiv G = H'$.

Fall 2: $F \neq H$.

Induktionsvoraussetzung: Annahme: $p(H')$ gilt für alle dir. Teilformeln H' von H .

Induktionsschritt: **Beweis**, dass $p(H)$ gilt (durch Fallunterscheidung):

Fall 2.1: $H = \neg H_1$. Da $F \neq H$, ist F eine Teilformel von H_1 .

Induktionvoraussetzung: $p(H_1)$ gilt, d.h. $H_1 \equiv H'_1$, wobei H'_1 aus H_1 hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H_1 durch G ersetzt wird.

Da $H = \neg H_1$, ist $H' = \neg H'_1$.

Dann für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$: $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(\neg H_1) = \neg \mathcal{A}(H_1) \stackrel{I.V.}{=} \neg \mathcal{A}(H'_1) = \mathcal{A}(\neg H'_1) = \mathcal{A}(H')$

Somit ist bewiesen, dass $H \equiv H'$.

Substitutionstheorem

Beweis: (Fortsetzung)

Induktionsschritt: Beweis, dass $p(H)$ gilt (durch Fallunterscheidung):

Fall 2.2: $H = H_1 \text{ op } H_2$. Da $F \neq H$, ist F Teilformel von H_1 oder von H_2 .

Fall 2.2.1 F ist eine Teilformel von H_1 .

Induktionvoraussetzung: $p(H_1)$ gilt, d.h. $H_1 \equiv H'_1$, wobei H'_1 aus H_1 hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H_1 durch G ersetzt wird.

Da $H = H_1 \text{ op } H_2$, und F in H_1 vorkommt, so $H' = H'_1 \text{ op } H_2$.

Dann für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$: $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H_1 \text{ op } H_2) = \mathcal{A}(H_1) \text{ op } \mathcal{A}(H_2) \stackrel{I.V.}{=} \mathcal{A}(H'_1) \text{ op } \mathcal{A}(H_2) = \mathcal{A}(H'_1 \text{ op } H_2) = \mathcal{A}(H')$.

Somit ist bewiesen, dass $H \equiv H'$.

Fall 2.2.2 F ist eine Teilformel von H_2 . Analog.

Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung

Definition: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel
- Anwendung des Substitutionstheorems

Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung

Definition: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel
- Anwendung des Substitutionstheorems

Theorem

Äquivalenzumformung bildet mit den aufgelisteten wichtigen Äquivalenzen einen vollständigen Kalkül:

Wenn F und G logisch äquivalent sind, kann F in G umgeformt werden.

Beispiel

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

Beispiel

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R)) \quad (\text{Elimination Implikation})$$

Beispiel

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

Beispiel

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$$

(De Morgan's Regel, \vee)

Beispiel

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$$

(De Morgan's Regel, \vee)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R))$$

(Doppelte Negation, De Morgan, \vee)

Beispiel

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R))$$

(Elimination Implikation)

(Elimination Implikation)

(De Morgan's Regel, \vee)

(Doppelte Negation, De Morgan, \vee)

(Doppelte Negation)

Beispiel

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$$

(De Morgan's Regel, \vee)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R))$$

(Doppelte Negation, De Morgan, \vee)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R))$$

(Doppelte Negation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge P \wedge \neg R))$$

(Distributivität)

Beispiel

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$$

(De Morgan's Regel, \vee)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R))$$

(Doppelte Negation, De Morgan, \vee)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R))$$

(Doppelte Negation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge P \wedge \neg R))$$

(Distributivität)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg R \wedge P))$$

(Kommutativität)

Beispiel

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$$

(De Morgan's Regel, \vee)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R))$$

(Doppelte Negation, De Morgan, \vee)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R))$$

(Doppelte Negation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge P \wedge \neg R))$$

(Distributivität)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg R \wedge P))$$

(Kommutativität)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee \perp)$$

(Äquivalenzen mit \perp)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \wedge P \wedge \neg R)$$

(Äquivalenzen mit \perp)

Beispiel

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$$

(De Morgan's Regel, \vee)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R))$$

(Doppelte Negation, De Morgan, \vee)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R))$$

(Doppelte Negation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge P \wedge \neg R))$$

(Distributivität)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg R \wedge P))$$

(Kommutativität)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee \perp)$$

(Äquivalenzen mit \perp)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \wedge P \wedge \neg R)$$

(Äquivalenzen mit \perp)

$$\equiv (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R)$$

(Distributivität)

$$\equiv (\neg P \wedge P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R)$$

(Kommutativität)

Beispiel

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge P \wedge \neg R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg R \wedge P))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee \perp)$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \wedge P \wedge \neg R)$$

$$\equiv (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R)$$

$$\equiv (\neg P \wedge P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R)$$

$$\equiv ((\neg P \wedge P) \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee ((Q \wedge \neg Q) \wedge P \wedge \neg R)$$

(Elimination Implikation)

(Elimination Implikation)

(De Morgan's Regel, \vee)

(Doppelte Negation, De Morgan, \vee)

(Doppelte Negation)

(Distributivität)

(Kommutativität)

(Äquivalenzen mit \perp)

(Äquivalenzen mit \perp)

(Distributivität)

(Kommutativität)

(Assoziativität)

Beispiel

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$$

(Elimination Implikation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$$

(De Morgan's Regel, \vee)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R))$$

(Doppelte Negation, De Morgan, \vee)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R))$$

(Doppelte Negation)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge P \wedge \neg R))$$

(Distributivität)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg R \wedge P))$$

(Kommutativität)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee \perp)$$

(Äquivalenzen mit \perp)

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \wedge P \wedge \neg R)$$

(Äquivalenzen mit \perp)

$$\equiv (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R)$$

(Distributivität)

$$\equiv (\neg P \wedge P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R)$$

(Kommutativität)

$$\equiv ((\neg P \wedge P) \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee ((Q \wedge \neg Q) \wedge P \wedge \neg R)$$

(Assoziativität)

$$\equiv \perp \vee \perp \equiv \perp$$

(Äquivalenzen mit \perp)

Bis jetzt

Kalküle

Wahrheitstafelmethode

Äquivalenzumformung

Bis jetzt

Kalküle

Wahrheitstafelmethode

Äquivalenzumformung

Nicht besonders effizient

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

Dazu brauchen wir “Normalformen”

Normalformen

Definition:

- **Atom:** aussagenlogische Variable
- **Literal:** Atom, oder
Negation eines Atoms

Beispiel. Sei $\Pi = \{P, Q, R\}$.

Atome: P, Q, R

Literale: $P, \neg P, Q, \neg Q, R, \neg R$

Normalformen

Definition:

- **Atom:** aussagenlogische Variable
- **Literal:** Atom, oder
Negation eines Atoms

Definition:

Klausel: Eine Disjunktion von Literalen

- mehrstellige Disjunktionen $(P \vee \neg Q \vee R)$, $(P \vee P \vee \neg Q)$
- einstellige Disjunktionen P
- die nullstellige Disjunktion (leere Klausel) \perp

Normalformen

Definition:

Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln

Normalformen

Definition:

Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Normalformen

Definition:

Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Beispiele:

$$(P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg R \vee \neg S)$$

$$P \vee Q$$

$$P \wedge (Q \vee R)$$

$$P \wedge Q$$

$$P \wedge P$$

$$\top$$

Normalformen

Definition:

Disjunktive Normalform (DNF): Eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen.

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Beispiele:

$$(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R \wedge \neg S)$$

$$P \wedge Q$$

$$P \vee (Q \wedge R)$$

$$P \vee Q$$

$$P \vee P$$

$$\perp$$

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
 - eine äquivalente Formel in KNF
 - eine äquivalente Formel in DNF

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
 - eine äquivalente Formel in KNF
 - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
 - eine äquivalente Formel in KNF
 - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
 - eine äquivalente Formel in KNF
 - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

Beispiel

$$F : (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

Beispiel: DNF

$$F : (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

Beispiel: DNF

$$F : (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

$$\text{DNF: } (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

Beispiel: KNF

$$F : (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F	$\neg F$
0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0

DNF für $\neg F$: $(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$

KNF für F : $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

Normalformen

DNF für F :

$$\bigvee_{\substack{\mathcal{A}: \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})$$

wobei:

$$P^0 = \neg P$$

$$P^1 = P$$

Normalformen

DNF für F :

$$\bigvee_{\substack{\mathcal{A}: \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})$$

wobei:

$$P^0 = \neg P$$

$$P^1 = P$$

Theorem

Für alle Interpretationen $\mathcal{A}' : \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0, 1\}$:

$$\mathcal{A}'(F) = 1 \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{A}'\left(\bigvee_{\substack{\mathcal{A}: \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})\right) = 1.$$

Normalformen

DNF für F :

$$\bigvee_{\substack{\mathcal{A}: \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})$$

wobei:

$$P^0 = \neg P$$

$$P^1 = P$$

KNF für F : $\neg F'$,

wobei F' die DNF von $\neg F$ ist.

Normalformen

DNF für F :

$$\bigvee_{\substack{\mathcal{A}: \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})$$

wobei:

$$P^0 = \neg P$$

$$P^1 = P$$

KNF für F : $\neg F'$,

wobei F' die DNF von $\neg F$ ist.

KNF für F :

$$\bigwedge_{\substack{\mathcal{A}: \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=0}} (P_1^{1-\mathcal{A}(P_1)} \vee \dots \vee P_n^{1-\mathcal{A}(P_n)})$$

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
 - eine äquivalente Formel in KNF
 - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden
nächste Vorlesung

Umformung in KNF

Vier Schritte:

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von \leftrightarrow

Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von \leftrightarrow

Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von \rightarrow

Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von \leftrightarrow

Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von \rightarrow

Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. "Nach innen schieben" von \neg

Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$

\mapsto **Negationsnormalform (NNF)**

Eine logische Formel ist in Negationsnormalform (NNF), falls die Negationsoperatoren in ihr nur direkt über atomaren Aussagen vorkommen.

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von \leftrightarrow

Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von \rightarrow

Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. “Nach innen schieben” von \neg

Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$

(NNF)

4. “Nach innen schieben” von \vee

Verwende Distributivität von \vee über \wedge

Umformung in DNF

Vier Schritte:

1. Elimination von \leftrightarrow

Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von \rightarrow

Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. “Nach innen schieben” von \neg

Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$

(NNF)

4. “Nach innen schieben” von \wedge

Verwende Distributivität von \wedge über \vee

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von \leftrightarrow

Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von \rightarrow

Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. “Nach innen schieben” von \neg

Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$

(NNF)

4. “Nach innen schieben” von \vee

Verwende Distributivität von \vee über \wedge

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von \leftrightarrow

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von \leftrightarrow

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von \rightarrow

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von \leftrightarrow

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von \rightarrow

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P)$$

3. "Nach innen schieben" von \neg

(NNF)

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von \leftrightarrow

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von \rightarrow

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P)$$

3. "Nach innen schieben" von \neg

(NNF)

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)$$

4. "Nach innen schieben" von \vee

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (\neg R \vee P)$$

Umformung in DNF

Vier Schritte:

1. Elimination von \leftrightarrow

Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von \rightarrow

Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. “Nach innen schieben” von \neg

Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$

(NNF)

4. “Nach innen schieben” von \wedge

Verwende Distributivität von \wedge über \vee

Umformung in DNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. **Negationsnormalform (NNF)** (s. Seite 69):

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)$$

2. "Nach innen schieben" von \wedge

$$\begin{aligned} & (\neg P \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \vee (Q \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \vee (R \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \\ \equiv & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge P) \vee \\ & (R \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge P) \\ \equiv & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee \underbrace{(\neg P \wedge P)}_{\equiv \perp} \vee \underbrace{((Q \wedge \neg Q) \wedge \neg R)}_{\equiv \perp} \vee (Q \wedge P) \vee \\ & \underbrace{((R \wedge \neg R) \wedge \neg Q)}_{\equiv \perp} \vee (R \wedge P) \\ \equiv & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge P) \vee (R \wedge P) \end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge_{f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2\}} (P_{1, f(1)} \vee \cdots \vee P_{n, f(n)})$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$n = 1 : A_1 = P_{11} \wedge P_{12} \qquad \text{Länge: } 2 = 2^1$$

$$\begin{aligned} n = 2 : A_2 &= (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22}) \\ &\equiv ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22}) \\ &\equiv (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}) \quad \text{Länge: } 2 \cdot 2 = 2^2 \end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$n = 1 : A_1 = P_{11} \wedge P_{12} \qquad \text{Länge: } 2 = 2^1$$

$$\begin{aligned} n = 2 : A_2 &= (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22}) \\ &\equiv ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22}) \\ &\equiv (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}) \end{aligned} \qquad \text{Länge: } 2 \cdot 2 = 2^2$$

$$\begin{aligned} n = 3 : A_3 &= \underbrace{(P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})}_{A_2} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) \\ &\equiv \underbrace{((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}))}_{KNF(A_2)} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) \end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$n = 1 : A_1 = P_{11} \wedge P_{12} \qquad \text{Länge: } 2 = 2^1$$

$$\begin{aligned} n = 2 : A_2 &= (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22}) \\ &\equiv ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22}) \\ &\equiv (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}) \end{aligned} \qquad \text{Länge: } 2 \cdot 2 = 2^2$$

$$\begin{aligned} n = 3 : A_3 &= \underbrace{(P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})}_{A_2} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) \\ &\equiv \underbrace{((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}))}_{KNF(A_2)} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) \\ &\equiv (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{31}) \wedge \\ &\quad (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{32}) \end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$n = 1 : A_1 = P_{11} \wedge P_{12} \quad \text{Länge: } 2^1$$

$$\begin{aligned} n = 2 : A_2 &= (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22}) \\ &\equiv ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22}) \\ &\equiv (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}) \end{aligned} \quad \text{Länge: } 2^2$$

$$\begin{aligned} n = 3 : A_3 &= \underbrace{(P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})}_{A_2} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) \\ &\equiv \underbrace{((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee (P_{31} \wedge P_{32})}_{KNF(A_2)} \\ &\equiv (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{31}) \wedge \\ &\quad (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{32}) \\ &\equiv (((P_{11} \vee P_{21} \vee P_{31}) \wedge (P_{12} \vee P_{21} \vee P_{31}) \wedge (P_{11} \vee P_{22} \vee P_{31}) \wedge (P_{12} \vee P_{22} \vee P_{31})) \wedge \\ &\quad (((P_{11} \vee P_{21} \vee P_{32}) \wedge (P_{12} \vee P_{21} \vee P_{32}) \wedge (P_{11} \vee P_{22} \vee P_{32}) \wedge (P_{12} \vee P_{22} \vee P_{32})) \text{ Länge: } 2^3 \end{aligned}$$