Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 5

3.05.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- **Syntax** (Formeln)
- **Semantik**

  Wertebelegungen/Valuationen/Modelle

  Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen

  Gültigkeit und Erfüllbarkeit

  Folgerung, Äquivalenz
- **Kalküle**

  Wahrheitstafelmethode

  Äquivalenzumformung

  nicht sehr effizient.

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

Bis jetzt

- Normalformen
  - Atome, Literale, Klauseln
  - Konjunktive und Disjunktive Normalform
  - Ablesen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln
  - Umformen in KNF/DNF
  - Mengenschreibweise
  - Subsumption

- SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)
  - SAT
    - Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln
    - k-SAT; 3-SAT vs. SAT

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition:

k-KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- Erfüllbarkeit für Formeln in KNF: NP-vollständig (ohne Beweis)
- Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF: NP-vollständig (Beweisidee)
- Erfüllbarkeit für Formeln in 2-KNF: polynomiell entscheidbar (eine der nächsten Vorlesungen)
- Erfüllbarkeit für Formeln in DNF: polynomiell entscheidbar

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis

- 3-SAT ist ein Spezialfall von SAT und deshalb wie SAT in NP.
- Um zu zeigen, dass 3-SAT ebenfalls NP-vollständig ist, müssen wir zeigen, dass jedes SAT Problem in polynomieller Zeit auf das 3-SAT Problem reduzierbar ist.

3-SAT

Theorem
Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 2)

Wir zeigen, dass jedes SAT Problem in polynomieller Zeit auf das 3-SAT Problem reduzierbar ist.

Gegeben sei eine Formel F in KNF. Wir transformieren F in eine Formel F' in 3-KNF, so dass:

$$F \text{ ist erfüllbar gdw. } F' \text{ ist erfüllbar.}$$

Eine k-Klausel sei eine Klausel mit k Literalen.

Aus einer 1- bzw 2-Klausel können wir leicht eine äquivalente 3-Klausel machen, indem wir ein Literal wiederholen.

Was machen wir mit k-Klauseln für $k > 3$?

3-SAT

Theorem
Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 3)

Sei C beispielsweise eine 4-Klausel der Form

$$C = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4.$$

In einer Klauseltransformation ersetzen wir C durch die Teilformel

$$C_0 = (L_1 \vee L_2 \vee H) \wedge (\neg H \vee L_3 \vee L_4),$$

wobei H eine zusätzlich eingeführte Hilfsvariable bezeichnet.

Beispiel

$$C = P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S \quad \mapsto \quad (P \vee \neg Q \vee H) \wedge (\neg H \vee \neg R \vee S).$$

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 4)

$C = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4; \quad C_0 = (L_1 \vee L_2 \vee H) \wedge (\neg H \vee L_3 \vee L_4),$

F' sei aus F entstanden durch Ersetzung von C durch C_0.

zu zeigen: F' erfüllbar gdw. F erfüllbar

“$\Leftarrow$”

Sei $\mathcal{A}$ eine erfüllende Belegung für F. $\mathcal{A}$ weist mindestens einem Literal aus C den Wert 1 zu. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) Falls L_1 oder L_2 den Wert 1 haben, so ist F' für $\mathcal{A}(H) = 0$ erfüllt.
2) Falls L_3 oder L_4 den Wert 1 haben, so ist F' für $\mathcal{A}(H) = 1$ erfüllt.

Also ist F' in beiden Fällen erfüllbar.

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 5)

$$C = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4; \quad C_0 = (L_1 \vee L_2 \vee H) \wedge (\neg H \vee L_3 \vee L_4),$$

F' sei aus F entstanden durch Ersetzung von C durch C_0.

zu zeigen: F' erfüllbar gdw. F erfüllbar

“$\Rightarrow$”

Sei $\mathcal{A}$ eine erfüllende Belegung für F'. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) Falls $\mathcal{A}(H) = 0$, so muss $\mathcal{A}(L_1) = 1$ oder $\mathcal{A}(L_2) = 1$.

2) Falls $\mathcal{A}(H) = 1$, so muss $\mathcal{A}(L_3) = 1$ oder $\mathcal{A}(L_4) = 1$

In beiden Fällen erfüllt $\mathcal{A}$ somit auch C, i.e. auch F.

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 6)

Wir verallgemeinern die Klauseltransformation für $k \geq 4$:

Jede Klausel der Form

$$L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_{k-1} \vee L_k$$

wird durch eine Formel der Form

$$(L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_{k-2} \vee H) \wedge (\neg H \vee L_{k-1} \vee L_k)$$

ersetzt.

Die Erfüllbarkeitsäquivalenz folgt analog zum Fall $k = 4$.

Beispiele

Beispiel 1:

$$
\begin{aligned}
& (P \vee \neg Q \vee R \vee S \vee U \vee \neg V) \\
\mapsto\quad & (P \vee \neg Q \vee R \vee S \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee U \vee \neg V) \\
\mapsto\quad & (P \vee \neg Q \vee R \vee H_2) \wedge (\neg H_2 \vee S \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee U \vee \neg V) \\
\mapsto\quad & (P \vee \neg Q \vee H_3) \wedge (\neg H_3 \vee R \vee H_2) \wedge \\
& (\neg H_2 \vee S \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee U \vee \neg V)
\end{aligned}
$$

Beispiel 2:

$$
\begin{aligned}
& (P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg P \vee Q \vee R \vee \neg S) \\
\mapsto\quad & (P \vee \neg Q \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg P \vee Q \vee R \vee \neg S) \\
\mapsto\quad & (P \vee \neg Q \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg P \vee Q \vee H_2) \wedge (\neg H_2 \vee R \vee \neg S)
\end{aligned}
$$

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Bis jetzt:

- Erfüllbarkeit für Formeln in DNF: polynomiell entscheidbar

  $F = \bigvee_{i=1}^{n} (\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ Formel in DNF unerfüllbar gdw. für alle i, $(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ enthält zwei komplementäre Literale.

- Erfüllbarkeit für Formeln in KNF: NP-vollständig (ohne Beweis)

- Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT): NP-vollständig

- Erfüllbarkeit für Formeln in 2-KNF: polynomiell entscheidbar

  (eine der nächsten Vorlesungen)

Jetzt:

Horn-Formeln

Erfüllbarkeit: polynomiell entscheidbar

Horn-Formeln

Defintion:

Horn-Formel: Formel in KNF, in der jede Klausel höchstens ein positives Literal enthält

Horn-Formeln

Defintion:

Horn-Formel: Formel in KNF, in der jede Klausel höchstens ein positives Literal enthält

Notation: als Implikation

$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n \vee P$	$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow P$	$P_1, \ldots, P_n \rightarrow P$
$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n$	$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow \perp$	$P_1, \ldots, P_n \rightarrow$
P	$\top \rightarrow P$	$\rightarrow P$

Horn-Formeln

Defintion:

Horn-Formel: Formel in KNF, in der jede Klausel höchstens ein positives Literal enthält

Notation: als Implikation

$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n \vee P$	$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow P$	$P_1, \ldots, P_n \rightarrow P$
$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n$	$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow \perp$	$P_1, \ldots, P_n \rightarrow$
P	$\top \rightarrow P$	$\rightarrow P$

$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$: Rumpf

P: Kopf

Horn-Formeln

Defintion:

Horn-Formel: Formel in KNF, in der jede Klausel höchstens ein positives Literal enthält

Notation: als Implikation

$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n \vee P$	$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow P$	$P_1, \ldots, P_n \rightarrow P$
$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n$	$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow \perp$	$P_1, \ldots, P_n \rightarrow$
P	$\top \rightarrow P$	$\rightarrow P$

$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$: Rumpf

P: Kopf

$\rightarrow P$: Fakt

Horn Formel: Beispiele

Klausel	Literalmengen	Implikationen
$\neg P$	$\{\neg P\}$	$P \rightarrow$
$Q \vee \neg R \vee \neg S$	$\{Q, \neg R, \neg S\}$	$R, S \rightarrow Q$
$\neg Q \vee \neg S$	$\{\neg Q, \neg S\}$	$Q, S \rightarrow$
R	$\{R\}$	$\rightarrow R$
$\neg Q \vee P$	$\{\neg Q, P\}$	$Q \rightarrow P$

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Lemma. Sei F Hornformel die keine Fakten enthält. Dann ist F erfüllbar.

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Lemma. Sei F Hornformel die keine Fakten enthält. Dann ist F erfüllbar.

Beweis: Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 0$ für alle $P \in \Pi$. Dann $\mathcal{A}(F) = 1$.

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem
Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis: (Idee)

Ziel: $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$.

Falls keine Fakten in F: F erfüllbar.

Sonst: Für alle Fakten $\to P$ in F: $\mathcal{A}(P) := 1$;

Wiederhole das Verfahren für F', entstanden aus F durch Ersetzung von P mit $\top$.

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

Eingabe: $F = D_1 \wedge \cdots \wedge D_n$ eine Hornformel

(die Klausel D_i enthält höchstens ein positives Literal, $i = 1, 2, \ldots, n$)

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

Eingabe: $F = D_1 \wedge \cdots \wedge D_n$ eine Hornformel

(die Klausel D_i enthält höchstens ein positives Literal)

Ein Atom in F zu markieren, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in F zu markieren

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

0: IF keine Fakten (Klausel "$\rightarrow A$") vorhanden

THEN Ausgabe: erfüllbar

ELSE markiere alle Fakten in F (Atome A mit $\rightarrow A$ in F)

1: IF keine Klausel $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ in F, so dass

alle Atome in $A_1, \ldots, A_n$ markiert aber B nicht

THEN Ausgabe: erfüllbar

ELSE wähle die erste solche Klausel

IF B leer

THEN Ausgabe: unerfüllbar

ELSE markiere überall B in F

GOTO 1

Beispiel 1

$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Konjunktion von Implikationen:

$$\begin{array}{rlr}
(P \to \bot) & \wedge & P \to \\
(\top \to Q) & \wedge & \to Q \\
(P \to R) & \wedge & P \to R \\
(Q \to S) & \wedge & Q \to S \\
(W \to T) & \wedge & W \to T \\
(S \to U) & \wedge & S \to U \\
((U \wedge T \wedge Z) \to P) & \wedge & U, T, Z \to P \\
((Q \wedge S \wedge U) \to W) & & Q, S, U \to W
\end{array}$$

Beispiel 1

$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow \\
&\rightarrow \underline{Q} \\
P &\rightarrow R \\
\underline{Q} &\rightarrow S \\
W &\rightarrow T \\
S &\rightarrow U \\
U, T, Z &\rightarrow P \\
\underline{Q}, S, U &\rightarrow W
\end{aligned}
$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

$$\begin{array}{r}
P \rightarrow \\
\rightarrow \underline{Q} \\
P \rightarrow R \\
\underline{Q} \rightarrow \underline{S} \\
W \rightarrow T \\
\underline{S} \rightarrow U \\
U, T, Z \rightarrow P \\
\underline{Q}, \underline{S}, U \rightarrow W
\end{array}$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$

Beispiel 1

$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow \\
&\rightarrow \underline{Q} \\
P &\rightarrow R \\
\underline{Q} &\rightarrow \underline{S} \\
W &\rightarrow T \\
\underline{S} &\rightarrow \underline{U} \\
\underline{U}, T, Z &\rightarrow P \\
\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} &\rightarrow W
\end{aligned}
$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$

Beispiel 1

$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$

$$\begin{aligned}
P &\rightarrow \\
&\rightarrow \underline{Q} \\
P &\rightarrow R \\
\underline{Q} &\rightarrow \underline{S} \\
\underline{W} &\rightarrow T \\
\underline{S} &\rightarrow \underline{U} \\
\underline{U}, T, Z &\rightarrow P \\
\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} &\rightarrow \underline{W}
\end{aligned}$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$

$\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow \\
&\rightarrow \underline{Q} \\
P &\rightarrow R \\
\underline{Q} &\rightarrow \underline{S} \\
\underline{W} &\rightarrow \underline{T} \\
\underline{S} &\rightarrow \underline{U} \\
\underline{U}, \underline{T}, Z &\rightarrow P \\
\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} &\rightarrow \underline{W}
\end{aligned}
$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$

$\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$

$\{Q, S, U, W, T\}$ wegen $W \rightarrow T$

Beispiel 1

$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$ Erfüllbar

$$P \rightarrow$$
$$\rightarrow \underline{Q}$$
$$P \rightarrow R$$
$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$
$$\underline{W} \rightarrow \underline{T}$$
$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$
$$\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$$
$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$

$\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$

$\{Q, S, U, W, T\}$ wegen $W \rightarrow T$

Keine weiteren Schritte möglich, da es keine Implikation gibt,deren linke Seite vollständig markiert ist und die rechte Seite nicht

Modell: $\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(T) = 1,\ \mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(Z) = 0$

Markierte Atome: wahr; nicht markierte Atome: falsch.

Beispiel 2

$(\neg P) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$

$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$ Erfüllbar

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow \\
P &\rightarrow R \\
Q &\rightarrow S \\
W &\rightarrow T \\
S &\rightarrow U \\
U, T, Z &\rightarrow P \\
Q, S, U &\rightarrow W
\end{aligned}
$$

Markierte Atome und Erklärung:

Keine Schritte möglich, da es

keine Implikation gibt,deren linke Seite

vollständig markiert ist und die rechte Seite nicht

Modell: $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(Z) = 0$

Beispiel 3

$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U)$

$$\begin{aligned} P &\rightarrow \\ &\rightarrow \underline{Q} \\ P &\rightarrow R \\ \underline{Q} &\rightarrow \underline{S} \\ W &\rightarrow T \\ \underline{S} &\rightarrow \underline{U} \\ \underline{U}, T, Z &\rightarrow P \\ \underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} &\rightarrow \end{aligned}$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$

Unerfüllbar

Q, S, U markiert, aber Kopf von

$Q, S, U \rightarrow$ leer

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem
Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis: (Idee)

Ziel: $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$.

Falls keine Fakten in F: F erfüllbar.

Sonst: Für alle Fakten $\to P$ in F: $\mathcal{A}(P) := 1$;

Wiederhole das Verfahren für F', entstanden aus F durch Ersetzung von P mit $\top$.

Komplexität: $|F| \times |F|$

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

   Resolution

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

    Resolution

2. Formelmengen

    Semantische Tableaux

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

   Resolution

2. Formelmengen

   Semantische Tableaux

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow S$	$\neg Q \vee S$
$W \rightarrow T$	$\neg W \vee T$
$S \rightarrow U$	$\neg S \vee U$
$U, T, Z \rightarrow P$	$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, S, U \rightarrow W$	$\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$ $\quad Q \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	*Klauseln*
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow S$	S
$W \rightarrow T$	$\neg W \vee T$
$S \rightarrow U$	$\neg S \vee U$
$U, T, Z \rightarrow P$	$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, S, U \rightarrow W$	$\neg S \vee \neg U \vee W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$ $\quad Q \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \land (Q) \land (\neg P \lor R) \land (\neg Q \lor S) \land (T \lor \neg W) \land (\neg S \lor U) \land$$
$$(\neg U \lor \neg T \lor P \lor \neg Z) \land (\neg Q \lor \neg S \lor \neg U \lor W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \lor R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$W \rightarrow T$	$\neg W \lor T$
$\underline{S} \rightarrow U$	$\neg S \lor U$
$U, T, Z \rightarrow P$	$\neg U \lor \neg T \lor \neg Z \lor P$
$\underline{Q}, \underline{S}, U \rightarrow W$	$\neg S \lor \neg U \lor W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$W \rightarrow T$	$\neg W \vee T$
$\underline{S} \rightarrow U$	U
$U, T, Z \rightarrow P$	$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, U \rightarrow W$	$\neg U \vee W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$W \rightarrow T$	$\neg W \vee T$
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	U
$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$	$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow W$	$\neg U \vee W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$
$\{Q, S, U\}$	wegen $S \rightarrow U$	$U \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$W \rightarrow T$	$\neg W \vee T$
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	U
$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$	$\neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow W$	W

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$
$\{Q, S, U\}$	wegen $S \rightarrow U$	$U \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \to$	$\neg P$
$\to \underline{Q}$	Q
$P \to R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \to \underline{S}$	S
$\underline{W} \to T$	T
$\underline{S} \to \underline{U}$	U
$\underline{U}, T, Z \to P$	$\neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \to \underline{W}$	W

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\top \to Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \to S$	$S \mapsto \top$
$\{Q, S, U\}$	wegen $S \to U$	$U \mapsto \top$
$\{Q, S, U, W\}$	wegen $Q, S, U \to W$	$W \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$\underline{W} \rightarrow \underline{T}$	T
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	U
$\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$	$\neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$	W

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$
$\{Q, S, U\}$	wegen $S \rightarrow U$	$U \mapsto \top$
$\{Q, S, U, W\}$	wegen $Q, S, U \rightarrow W$	$W \mapsto \top$
$\{Q, S, U, W, T\}$	wegen $W \rightarrow T$	$T \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$\underline{W} \rightarrow \underline{T}$	T
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	U
$\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$	$\neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$	W

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$
$\{Q, S, U\}$	wegen $S \rightarrow U$	$U \mapsto \top$
$\{Q, S, U, W\}$	wegen $Q, S, U \rightarrow W$	$W \mapsto \top$
$\{Q, S, U, W, T\}$	wegen $W \rightarrow T$	$T \mapsto \top$

Modell:

$$\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(T) = 1$$
$$\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(Z) = 0$$

Markierte Atome: wahr; nicht markierte Atome: falsch.

Bemerkung

Horn Klauseln:

$$\frac{P \qquad P, P_1 \ldots P_n \to Q}{P_1 \ldots P_n \to Q}$$

Klauselschreibweise:

$$\frac{P \qquad \neg P \vee \neg P_1 \ldots \neg P_n \vee Q}{\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n \vee Q}$$

Mengenschreibweise:

$$\frac{\{P\} \qquad \{\neg P, \neg P_1, \neg P_n, Q\}}{\{\neg P_1, \ldots, \neg P_n, Q\}}$$

Verallgemeinerung?

Syllogismus (in der ersten Vorlesung erwähnt):

$$\frac{P \qquad P \to C}{C}$$

Mengenschreibweise: 1-Resolution (unit resolution)

$$\frac{\{P\} \qquad \{\neg P\} \cup C}{C} \qquad\qquad \frac{\{\neg P\} \qquad \{P\} \cup C}{C}$$

Verallgemeinerung?

Nicht geeignet für Erfüllbarkeitsüberprüfung beliebiger Klauselmengen:

Die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

ist nicht erfüllbar, aber mit 1-Resolution ist aus M nichts ableitbar, also auch nicht $\perp$.

Verallgemeinerung?

Nicht geeignet für Erfüllbarkeitsüberprüfung beliebiger Klauselmengen:

Die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

ist nicht erfüllbar, aber mit 1-Resolution ist aus M nichts ableitbar, also auch nicht $\perp$.

Ziel: Kalkül mit der Eigenschaft dass:
(1) falls M unerfüllbar $\perp$ ist aus M ableitbar
(2) falls $\perp$ aus M ableitbar, M unerfüllbar.

$\mapsto$ Der Resolutionkalkül

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform
- Eine einzige Regel

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform
- Eine einzige Regel
- Operiert auf Klauseln (in Mengenschreibweise)

Resolutionskalkül

Definition: Resolutionsregel (einzige Regel des Kalküls)

$$\frac{C_1 \cup \{P\} \qquad \{\neg P\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

wobei

- P eine aussagenlogische Variable
- C_1, C_2 Klauseln (können leer sein)

Definition:

$C_1 \cup C_2$ heißt Resolvente von $C_1 \cup \{P\}$, $C_2 \cup \{\neg P\}$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\perp}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\perp}$$

Insgesamt: $M \vdash_{\mathsf{Res}} \perp$

also: M unerfüllbar

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$$

ist allgemeingültig

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$$

ist allgemeingültig

Dazu zeigen wir, dass

$$\neg[(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))]$$

unerfüllbar ist.

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$$

ist allgemeingültig

Dazu zeigen wir, dass

$$\neg[(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))]$$

unerfüllbar ist.

Klauselnormalform:

$$\{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M:

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M:

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M:

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)
(6)	$\{R\}$	aus (2) und (5)

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M:

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)
(6)	$\{R\}$	aus (2) und (5)
(7)	$\perp$	aus (4) und (6)

Resolution: Bemerkungen

Vorsicht bei Klauseln mit mehreren Resolutionsmöglichkeiten

- Zwei Klauseln können mehr als eine Resolvente haben
  z.B.: $\{A, B\}$ und $\{\neg A, \neg B\}$
- $\{A, B, C\}$ und $\{\neg A, \neg B, D\}$ haben NICHT $\{C, D\}$ als Resolvente

Resolution: Bemerkungen

Vorsicht bei Klauseln mit mehreren Resolutionsmöglichkeiten

- Zwei Klauseln können mehr als eine Resolvente haben
  z.B.: $\{A, B\}$ und $\{\neg A, \neg B\}$
- $\{A, B, C\}$ und $\{\neg A, \neg B, D\}$ haben NICHT $\{C, D\}$ als Resolvente

Heuristik: Immer möglichst kleine Klauseln ableiten

Zusammenfassung

- SAT-Probleme (SAT, 3-SAT, 2-SAT, DNF-SAT)
- Horn-Formeln
- Erfüllbarkeitstest für Hornformeln
- 1-Resolution (unvollständig)
- Der aussagenlogische Resolutionskalkül

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (ohne Mengenschreibweise)

$$\frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_1 \vee P_1}$$

$$\frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_2 \vee P_2} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2}$$

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (ohne Mengenschreibweise)

$$\frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_1 \vee P_1}$$

$$\frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_2 \vee P_2} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2}$$

Auf diese Weise ist $\perp$ nicht herleitbar

Ohne Mengenschreibweise

Resolutionsregel:

$$\frac{C_1 \vee P \qquad \neg P \vee C_2}{C_1 \vee C_2}$$

Faktorisieren:

$$\frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}$$

Resolution mit Faktorisierung

Die Menge

$$E = \{P_1 \lor \neg P_2, \neg P_1 \lor P_2, \neg P_1 \lor \neg P_2, P_1 \lor P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (mit Faktorisieren)

$$\frac{P_1 \lor \neg P_2 \quad \neg P_1 \lor P_2}{\neg P_2 \lor P_2} \quad \frac{P_1 \lor \neg P_2 \quad \neg P_1 \lor P_2}{\neg P_1 \lor P_1} \quad \frac{P_1 \lor \neg P_2 \quad \neg P_1 \lor \neg P_2}{\neg P_2 \lor \neg P_2} \quad \frac{P_1 \lor \neg P_2 \quad P_1 \lor P_2}{P_1 \lor P_1}$$

$$\frac{\neg P_1 \lor P_2 \quad \neg P_1 \lor \neg P_2}{\neg P_1 \lor \neg P_1} \quad \frac{\neg P_1 \lor P_2 \quad P_1 \lor P_2}{P_2 \lor P_2} \quad \frac{\neg P_1 \lor \neg P_2 \quad P_1 \lor P_2}{\neg P_1 \lor P_1} \quad \frac{\neg P_1 \lor \neg P_2 \quad P_1 \lor P_2}{\neg P_2 \lor P_2}$$

$$\frac{P_1 \lor P_1}{P_1} \quad \frac{\neg P_1 \lor \neg P_1}{\neg P_1} \quad \frac{P_2 \lor P_2}{P_2} \quad \frac{\neg P_2 \lor \neg P_2}{\neg P_2}$$

$$\frac{P_1 \quad \neg P_1}{\perp}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\perp}$$

Insgesamt: $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

also: M unerfüllbar