Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 6

8.05.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- **Syntax** (Formeln)
- **Semantik**

  Wertebelegungen/Valuationen/Modelle
  Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen
  Gültigkeit und Erfüllbarkeit
  Folgerung, Äquivalenz

- **Kalküle**

  Wahrheitstafelmethode
  Äquivalenzumformung

  nicht sehr effizient.

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

Bis jetzt

- Normalformen

  Atome, Literale, Klauseln

  Konjunktive und Disjunktive Normalform

  Ablesen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln

  Umformen in KNF/DNF

  Mengenschreibweise

  Subsumption

- SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

  SAT

  – Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln

  – k-SAT; 3-SAT vs. SAT

  – Horn Formeln

- Der aussagenlogische Resolutionskalkül

Resolutionskalkül

Definition: Resolutionsregel (einzige Regel des Kalküls)

$$\frac{C_1 \cup \{P\} \qquad \{\neg P\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

wobei

- P eine aussagenlogische Variable
- C_1, C_2 Klauseln (können leer sein)

Definition:

$C_1 \cup C_2$ heißt Resolvente von $C_1 \cup \{P\}, C_2 \cup \{\neg P\}$

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{\color{red}{P_1}\} \quad \{\color{red}{\neg P_1}\}}{\perp}$$

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (ohne Mengenschreibweise)

$$\frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_1 \vee P_1}$$

$$\frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_2 \vee P_2} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2}$$

Auf diese Weise ist $\perp$ nicht herleitbar

Ohne Mengenschreibweise

Resolutionsregel:

$$\frac{C_1 \vee P \qquad \neg P \vee C_2}{C_1 \vee C_2}$$

Faktorisieren:

$$\frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}$$

Resolution mit Faktorisierung

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (mit Faktorisieren)

$$\frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_1 \vee P_1}$$

$$\frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_2 \vee P_2} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2}$$

$$\frac{P_1 \vee P_1}{P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_1}{\neg P_1} \quad \frac{P_2 \vee P_2}{P_2} \quad \frac{\neg P_2 \vee \neg P_2}{\neg P_2}$$

$$\frac{P_1 \quad \neg P_1}{\perp}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\bot}$$

Insgesamt: $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$

also: M unerfüllbar

Resolution

Ziele:

- Formalisieren, was $M \vdash_{\mathsf{Res}} \perp$ bedeutet
- Zeigen, dass $M \vdash_{\mathsf{Res}} \perp$ gdw. M unerfüllbar.

Resolution

Sei F eine Klauselmenge und

$$\mathrm{Res}(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } F\}$$

Resolution

Sei F eine Klauselmenge und

$$\text{Res}(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } F\}$$

$\text{Res}^0(F) = F$

$\text{Res}^{n+1}(F) = \text{Res}(\text{Res}^n(F))$

$\text{Res}^\star(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}^n(F)$

(bezeichnet die Vereinigung der Resolventen aus aller möglichen Resolutionsschritte auf F)

Resolution

Sei F eine Klauselmenge und

$$\text{Res}(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } F\}$$

$\text{Res}^0(F) = F$

$\text{Res}^{n+1}(F) = \text{Res}(\text{Res}^n(F))$

$\text{Res}^\star(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}^n(F)$

(bezeichnet die Vereinigung der Resolventen aus aller möglichen Resolutionsschritte auf F)

Notation: Falls $C \in \text{Res}^\star(F)$, so schreiben wir $F \vdash_{\text{Res}} C$.

Resolution

Sei F eine Klauselmenge und

$$\text{Res}(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } F\}$$

$\text{Res}^0(F) = F$

$\text{Res}^{n+1}(F) = \text{Res}(\text{Res}^n(F))$

$\text{Res}^\star(F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \text{Res}^n(F)$

(bezeichnet die Vereinigung der Resolventen aus aller möglichen Resolutionsschritte auf F)

Notation: Falls $C \in \text{Res}^\star(F)$, so schreiben wir $F \vdash_{\text{Res}} C$.

Definition: Beweis für C (aus F): $C_1, \ldots C_n$, wobei:
$C_n = C$ und für alle $1 \leq i \leq n$: ($C_i \in F$ oder C_i Resolvente für $\frac{C_{j_1} \quad C_{j_2}}{C_i}$ mit $j_1, j_2 < i$).

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)
(6)	$\{R\}$	aus (2) und (5)

Beweis für $\{R\}$ aus M

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)
(6)	$\{R\}$	aus (2) und (5)
(7)	$\perp$	aus (4) und (6)

Beweis für $\perp$ aus M (Widerspruch)

Resolution: Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Korrektheit)
Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$, so M unerfüllbar.

Falls aus M die leere Klausel durch Resolution herleitbar ist, ist M unerfüllbar (es gibt keine Wertebelegung $\mathcal{A}$ in der alle Klauseln in M wahr sind).

Äquivalent:

Falls M erfüllbar ist, ist die leere Klausel durch Resolution nicht herleitbar.

Theorem (Vollständigkeit)
Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$.

Falls M unerfüllbar ist (d.h. es gibt keine Wertebelegung $\mathcal{A}$ in der alle Klauseln in M wahr sind), ist die leere Klausel aus M durch Resolution herleitbar.

Äquivalent:

Falls aus M die leere Klausel durch Resolution nicht herleitbar ist, ist M erfüllbar.

Resolution: Korrektheit

Theorem (Korrektheit)
Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$, so M unerfüllbar.

Resolution: Korrektheit

Theorem (Korrektheit)
Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$, so M unerfüllbar.

Beweis

(1) Wir zeigen, dass falls $C \in \mathrm{Res}^*(M)$, so $M \equiv M \cup \{C\}$.
(Theorem auf Seite 23). (NB: $M \cup \{C\}$: Notation für $M \wedge C$.)

(2) Es folgt, dass falls $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$, so $\bot \in \mathrm{Res}^*(M)$, d.h. $M \equiv M \cup \{\bot\}$.

(3) Aber $M \cup \{\bot\}$ ist unerfüllbar, deshalb ist auch M unerfüllbar.

Resolution: Korrektheit

Theorem (Korrektheit)
Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls $M \vdash_{\text{Res}} \bot$, so M unerfüllbar.

Beweis

(1) Wir zeigen, dass falls $C \in \text{Res}^*(M)$, so $M \equiv M \cup \{C\}$.
(Theorem auf Seite 23). (NB: $M \cup \{C\}$ Notation für $M \wedge C$.)

(2) Es folgt, dass falls $M \vdash_{\text{Res}} \bot$, so $\bot \in \text{Res}^*(M)$, d.h. $M \equiv M \cup \{\bot\}$.

(3) Aber $M \cup \{\bot\}$ ist unerfüllbar, deshalb ist auch M unerfüllbar.

Erklärung 1: Falls $M = \{C_1, \ldots, C_n\}$ so $M \cup \{\bot\}$ ist eine Notation für $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge \bot$. Aber $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge \bot \equiv \bot$, so ist $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge \bot$ unerfüllbar (also auch $M \cup \{\bot\}$). Da $M \equiv M \cup \{\bot\}$, ist auch M unerfüllbar.

Resolution: Korrektheit

Theorem (Korrektheit)
Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls $M \vdash_{\text{Res}} \bot$, so M unerfüllbar.

Beweis

(1) Wir zeigen, dass falls $C \in \text{Res}^*(M)$, so $M \equiv M \cup \{C\}$.
(Theorem auf Seite 23). (NB: $M \cup \{C\}$ Notation für $M \wedge C$.)

(2) Es folgt, dass falls $M \vdash_{\text{Res}} \bot$, so $\bot \in \text{Res}^*(M)$, d.h. $M \equiv M \cup \{\bot\}$.

(3) Aber $M \cup \{\bot\}$ ist unerfüllbar, deshalb ist auch M unerfüllbar.

Erklärung 1: Falls $M = \{C_1, \dots, C_n\}$ so $M \cup \{\bot\}$ ist eine Notation für $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge \bot$. Aber $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge \bot \equiv \bot$, so ist $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge \bot$ unerfüllbar (also auch $M \cup \{\bot\}$). Da $M \equiv M \cup \{\bot\}$, ist auch M unerfüllbar.

Erklärung 2: Es gibt keine Wertebelegung $\mathcal{A}$ die alle Klauseln in $M \cup \{\bot\}$ wahr macht (d.h. so dass: $\mathcal{A}(D) = 1$ für alle Klauseln D in M und $\mathcal{A}(\bot) = 1$).

Resolution: Korrektheit

(1) Wir zeigen, dass falls $C \in \text{Res}^*(M)$, so $M \equiv M \cup \{C\}$.

Lemma: $C_1 \vee P, C_2 \vee \neg P \models C_1 \vee C_2$

Beweis:

Sei $\mathcal{A}$ Interpretation mit $\mathcal{A}(C_1 \vee P) = 1$ und $\mathcal{A}(C_2 \vee \neg P) = 1$.

Zu zeigen: $\mathcal{A}(C_1 \vee C_2) = 1$.

Fall 1: $\mathcal{A}(C_1) = 1$. Dann $\mathcal{A}(C_1 \vee C_2) = 1$.

Fall 2: $\mathcal{A}(C_1) = 0$. Dann $\mathcal{A}(P) = 1$.
Da $\mathcal{A}(C_2 \vee \neg P) = 1$, so $\mathcal{A}(C_2) = 1$, d.h. $\mathcal{A}(C_1 \vee C_2) = 1$.

Resolution: Korrektheit

Theorem: Falls $C \in \mathrm{Res}^\star(F)$, so $F \equiv F \cup \{C\}$.

Beweis: Annahme: $C \in \mathrm{Res}^n(F)$. Zu zeigen: $F \equiv F \land C$, i.e.:

Für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $(\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(C) = 1)$.

Resolution: Korrektheit

Theorem: Falls $C \in \text{Res}^\star(F)$, so $F \equiv F \cup \{C\}$.

Beweis: Annahme: $C \in \text{Res}^n(F)$. Zu zeigen: $F \equiv F \wedge C$, i.e.:
Für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. ($\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(C) = 1$).

- Sei $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(F){=}1$ (d.h. $\mathcal{A}(C'){=}1$ für jede Klausel $C'{\in}F$).
  Zu zeigen: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $p(m)$: Falls $D \in \text{Res}^m(F)$, so $\mathcal{A}(D) = 1$.
  Beweis durch Induktion:

Resolution: Korrektheit

Theorem: Falls $C \in \text{Res}^\star(F)$, so $F \equiv F \cup \{C\}$.

Beweis: Annahme: $C \in \text{Res}^n(F)$. Zu zeigen: $F \equiv F \wedge C$, i.e.:
Für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $(\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(C) = 1)$.

- Sei $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(F){=}1$ (d.h. $\mathcal{A}(C'){=}1$ für jede Klausel $C'{\in}F$).
  Zu zeigen: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $p(m)$: Falls $D \in \text{Res}^m(F)$, so $\mathcal{A}(D) = 1$.
  Beweis durch Induktion:
  IB: $m = 0$**:** Sei $D \in \text{Res}^0(F) = F$. Dann $\mathcal{A}(D) = 1$.

Resolution: Korrektheit

Theorem: Falls $C \in \mathrm{Res}^\star(F)$, so $F \equiv F \cup \{C\}$.

Beweis: Annahme: $C \in \mathrm{Res}^n(F)$. Zu zeigen: $F \equiv F \wedge C$, i.e.:
Für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $(\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(C) = 1)$.

- Sei $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(F){=}1$ (d.h. $\mathcal{A}(C'){=}1$ für jede Klausel $C'{\in}F$).
  Zu zeigen: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $p(m)$: Falls $D \in \mathrm{Res}^m(F)$, so $\mathcal{A}(D) = 1$.
  Beweis durch Induktion:
  IB: $m = 0$**:** Sei $D \in \mathrm{Res}^0(F) = F$. Dann $\mathcal{A}(D) = 1$.
  IV: Annahme: $p(m)$ is wahr. **IS:** Zu zeigen: $p(m+1)$ wahr.

Resolution: Korrektheit

Theorem: Falls $C \in \text{Res}^\star(F)$, so $F \equiv F \cup \{C\}$.

Beweis: Annahme: $C \in \text{Res}^n(F)$. Zu zeigen: $F \equiv F \wedge C$, i.e.:

Für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. ($\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(C) = 1$).

- Sei $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(F){=}1$ (d.h. $\mathcal{A}(C'){=}1$ für jede Klausel $C'{\in}F$).
  Zu zeigen: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $p(m)$: Falls $D \in \text{Res}^m(F)$, so $\mathcal{A}(D) = 1$.
  Beweis durch Induktion:
  IB: $m = 0$**:** Sei $D \in \text{Res}^0(F) = F$. Dann $\mathcal{A}(D) = 1$.
  IV: Annahme: $p(m)$ is wahr. **IS:** Zu zeigen: $p(m+1)$ wahr.
  Sei $D \in \text{Res}^{m+1}(F)$.
  Fall 1: $D \in \text{Res}^m(F)$. Nach IV, $\mathcal{A}(D) = 1$.
  Fall 2: $D{=}C_1{\vee}C_2$ Resolvente von $C_1{\vee}P$, $C_2{\vee}\neg P \in \text{Res}^m(F)$. Nach IV:
  $\mathcal{A}(C_1{\vee}P){=}\mathcal{A}(C_2{\vee}\neg P){=}1$. Da $C_1{\vee}P$, $C_2{\vee}\neg P \models C_1{\vee}C_2$ folgt $\mathcal{A}(D){=}1$.

Resolution: Korrektheit

Theorem: Falls $C \in \text{Res}^\star(F)$, so $F \equiv F \cup \{C\}$.

Beweis: Annahme: $C \in \text{Res}^n(F)$. Zu zeigen: $F \equiv F \wedge C$, i.e.:
Für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. ($\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(C) = 1$).

- Sei $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(F){=}1$ (d.h. $\mathcal{A}(C'){=}1$ für jede Klausel $C'{\in}F$).
  Zu zeigen: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $p(m)$: Falls $D \in \text{Res}^m(F)$, so $\mathcal{A}(D) = 1$.

  Beweis durch Induktion:

  IB: $m = 0$**:** Sei $D \in \text{Res}^0(F) = F$. Dann $\mathcal{A}(D) = 1$.

  IV: Annahme: $p(m)$ is wahr. **IS:** Zu zeigen: $p(m + 1)$ wahr.

  Sei $D \in \text{Res}^{m+1}(F)$.

  Fall 1: $D \in \text{Res}^m(F)$. Nach IV, $\mathcal{A}(D) = 1$.

  Fall 2: $D{=}C_1{\vee}C_2$ Resolvente von $C_1{\vee}P$, $C_2{\vee}\neg P \in \text{Res}^m(F)$. Nach IV:

  $\mathcal{A}(C_1{\vee}P){=}\mathcal{A}(C_2{\vee}\neg P){=}1$. Da $C_1{\vee}P, C_2{\vee}\neg P \models C_1{\vee}C_2$ folgt $\mathcal{A}(D){=}1$.

  Dann $\mathcal{A}(C) = 1$, so ($\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(C) = 1$), d.h. $\mathcal{A}(F \wedge C) = 1$.

Resolution: Korrektheit

Theorem: Falls $C \in \mathrm{Res}^\star(F)$, so $F \equiv F \cup \{C\}$.

Beweis: Annahme: $C \in \mathrm{Res}^n(F)$. Zu zeigen: $F \equiv F \wedge C$, i.e.:
Für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $(\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(C) = 1)$.

- Sei $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(F){=}1$ (d.h. $\mathcal{A}(C'){=}1$ für jede Klausel $C'{\in}F$).
  Zu zeigen: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $p(m)$: Falls $D \in \mathrm{Res}^m(F)$, so $\mathcal{A}(D) = 1$.
  Beweis durch Induktion:
  IB: $m = 0$**:** Sei $D \in \mathrm{Res}^0(F) = F$. Dann $\mathcal{A}(D) = 1$.
  IV: Annahme: $p(m)$ is wahr. **IS:** Zu zeigen: $p(m+1)$ wahr.
  Sei $D \in \mathrm{Res}^{m+1}(F)$.
  Fall 1: $D \in \mathrm{Res}^m(F)$. Nach IV, $\mathcal{A}(D) = 1$.
  Fall 2: $D{=}C_1{\vee}C_2$ Resolvente von $C_1{\vee}P$, $C_2{\vee}\neg P \in \mathrm{Res}^m(F)$. Nach IV:
  $\mathcal{A}(C_1{\vee}P){=}\mathcal{A}(C_2{\vee}\neg P){=}1$. Da $C_1{\vee}P, C_2{\vee}\neg P \models C_1{\vee}C_2$ folgt $\mathcal{A}(D){=}1$.

  Dann $\mathcal{A}(C) = 1$, so $(\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(C) = 1)$, d.h. $\mathcal{A}(F \wedge C) = 1$.

- Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(F \wedge C) = 1$. Dann $\mathcal{A}(F) = 1$.

Resolution: Vollständigkeit

Theorem.
Für jede endliche Menge M von Klauseln gilt:
falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\mathsf{Res}} \perp$.

Resolution: Vollständigkeit

Theorem.
Für jede endliche Menge M von Klauseln gilt:
falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$.

Beweis: Induktion:

$p(n)$: Sei M Menge von Klauseln mit n Aussagenvariablen.
Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$

Resolution: Vollständigkeit

Theorem.
Für jede endliche Menge M von Klauseln gilt:
falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$.

Beweis: Induktion:

$p(n)$: Sei M Menge von Klauseln mit n Aussagenvariablen.
Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

Induktionsbasis: $n = 0$.
Dann $M = \{\perp\}$, d.h. $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

Resolution: Vollständigkeit

Theorem.
Für jede endliche Menge M von Klauseln gilt:
falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \bot$.

Beweis: Induktion:

$p(n)$: Sei M Menge von Klauseln mit n Aussagenvariablen.
Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \bot$

Induktionsbasis: $n = 0$. Dann $M = \{\bot\}$, d.h. $M \vdash_{\text{Res}} \bot$

Induktionsvoraussetzung: $p(n)$ gilt.
Induktionsschritt: Beweise, dass $p(n+1)$ gilt.

Sei M Menge von Klauseln mit Aussagenvariablen $\{P_1, \dots, P_n, P_{n+1}\}$.

M_0 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch $\bot$
M_1 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch $\top$

Resolution: Vollständigkeit

M_0 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch $\bot$:
- P_{n+1} wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die $\neg P_{n+1}$ enthalten werden ebenfalls gelöscht

M_1 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch $\top$:
- $\neg P_{n+1}$ wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die P_{n+1} enthalten werden ebenfalls gelöscht

Fakten:

- M_0, M_1 enthalten nur Aussagenvariablen $\{P_1, \ldots, P_n\}$
- M_0, M_1 unerfüllbar

Resolution: Vollständigkeit

M_0 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch $\bot$:
- P_{n+1} wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die $\neg P_{n+1}$ enthalten werden ebenfalls gelöscht

M_1 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch $\top$:
- $\neg P_{n+1}$ wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die P_{n+1} enthalten werden ebenfalls gelöscht

Fakten:

- M_0, M_1 enthalten nur Aussagenvariablen $\{P_1, \dots, P_n\}$
- M_0, M_1 unerfüllbar

Induktionsvoraussetzung:

$M_0 \vdash_{\text{Res}} \bot$, i.e. es gibt $C_1, C_2, \dots, C_m$ Beweis (aus M_0) für $\bot$

$M_1 \vdash_{\text{Res}} \bot$, i.e. es gibt $D_1, D_2, \dots, D_k$ Beweis (aus M_1) für $\bot$

Resolution: Vollständigkeit

M_0 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch $\bot$:
- P_{n+1} wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die $\neg P_{n+1}$ enthalten werden ebenfalls gelöscht

M_1 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch $\top$:
- $\neg P_{n+1}$ wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die P_{n+1} enthalten werden ebenfalls gelöscht

Fakten:

- M_0, M_1 enthalten nur Aussagenvariablen $\{P_1, \dots, P_n\}$
- M_0, M_1 unerfüllbar

Induktionsvoraussetzung:

$M_0 \vdash_{\text{Res}} \bot$, i.e. es gibt $C_1, C_2, \dots, C_m$ Beweis (aus M_0) für $\bot$

P_{n+1} zurück: $C'_1, C'_2, \dots, C'_m$ Beweis (aus M) für $\bot$ oder P_{n+1}

$M_1 \vdash_{\text{Res}} \bot$, i.e. es gibt $D_1, D_2, \dots, D_k$ Beweis (aus M_1) für $\bot$

$\neg P_{n+1}$ zurück: $D'_1, D'_2, \dots, D'_k$ Beweis (aus M) für $\bot$ oder $\neg P_{n+1}$

Resolution: Vollständigkeit

M_0 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch $\perp$:
- P_{n+1} wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die $\neg P_{n+1}$ enthalten werden ebenfalls gelöscht

M_1 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch $\top$:
- $\neg P_{n+1}$ wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die P_{n+1} enthalten werden ebenfalls gelöscht

Fakten:

- M_0, M_1 enthalten nur Aussagenvariablen $\{P_1, \dots, P_n\}$
- M_0, M_1 unerfüllbar

Induktionsvoraussetzung:

$M_0 \vdash_{\mathrm{Res}} \perp$, i.e. es gibt $C_1, C_2, \dots, C_m$ Beweis (aus M_0) für $\perp$

P_{n+1} zurück: $C'_1, C'_2, \dots, C'_m$ Beweis (aus M) für $\perp$ oder P_{n+1}

$M_1 \vdash_{\mathrm{Res}} \perp$, i.e. es gibt $D_1, D_2, \dots, D_k$ Beweis (aus M_1) für $\perp$

$\neg P_{n+1}$ zurück: $D'_1, D'_2, \dots, D'_k$ Beweis (aus M) für $\perp$ oder $\neg P_{n+1}$

$$\Rightarrow \quad M \vdash_{\mathrm{Res}} \perp$$

Resolution: Vollständigkeit

Theorem.
Für jede endliche Menge M von Klauseln gilt:
falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$.

Es gilt auch:

Theorem.
Für jede Menge M von Klauseln gilt:
falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$.

Terminierung

Theorem.
Aussagenlogische Resolution (für Klauselmengen in Mengennotation) terminiert, für jede endliche Menge von Klauseln.

Terminierung

Theorem.
Aussagenlogische Resolution (für Klauselmengen in Mengennotation) terminiert, für jede endliche Menge von Klauseln.

Beweis: Es gibt nicht mehr als 2^{2n} Klauseln (in Mengennotation) mit n Aussagenvariablen.

$\mapsto$ nicht mehr als $(2^{2n})^2$ mögliche Anwendungen der Resolutionsregel.

2-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 2-KNF (2SAT) ist polynomiell entscheidbar

Beweis (Krom, 1967)

Fall 1: Für jede Aussagenvariable P, entweder enthalten alle Klauseln P oder $\neg P$: erfüllbar.

Fall 2: Es gibt Klauseln $C_1 = L_1 \vee P$, $C_2 = L_2 \vee \neg P$

Resolutionschritt; Resolvente $L_1 \vee L_2$ (Mengennotation)

Fakt: Resolventen sind immer auch in 2-KNF.

Wenn F n Aussagenvariablen enthält, gibt es $2n$ mögliche Literale, und $\leq 4n^2$ nicht-leere verschiedene 2-KNF Klauseln.

F ist erfüllbar gdw. $\perp \not\in \text{Res}^*(F)$

Wenn wir $\text{Res}^*(F)$ berechnen: nicht mehr als $(4n^2)^2$ Resolutionsschritte notwendig.

$\mapsto$ Erfüllbarkeit von F ist polynomiell entscheidbar.

1-Resolution

Die 1-Resolution (unit resolution) benutzt dieselbe Notation wie im Resolutionskalkül. Die 1-Resolutionsregel ist ein Spezialfall der allgemeinen Resolutionsregel:

$$\frac{\{P\} \quad \{\neg P\} \cup C}{C} \qquad \frac{\{\neg P\} \quad \{P\} \cup C}{C}$$

Der 1-Resolutionskalkül ist nicht vollständig.

Die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

ist nicht erfüllbar, aber mit 1-Resolution ist aus M nichts ableitbar, also auch nicht $\perp$.

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

   Resolution — bis jetzt

2. Formelmengen

   Semantische Tableaux

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

   Resolution

2. Formelmengen

   Semantische Tableaux

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Beweis durch Fallunterscheidung
- Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Nachteile

- Mehr als eine Regel

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \to G)$

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(F \wedge G)$
- $F \vee G$
- $F \to G$

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$F \wedge G$	F	G
$\neg(F \vee G)$	$\neg F$	$\neg G$
$\neg(F \rightarrow G)$	F	$\neg G$
$\neg\neg F$	F	

Formeltypen

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(F \land G)$
- $F \lor G$
- $F \rightarrow G$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

β	β_1	β_2
$\neg(F \land G)$	$\neg F$	$\neg G$
$F \lor G$	F	G
$F \rightarrow G$	$\neg F$	G

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{array}}$$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{array}}$$

Konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

Konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

Disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

Konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \quad | \quad \beta_2}$$

Disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\phi\\ \neg\phi\end{array}}{\bot}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c} \phi \\ \neg\phi \\ | \\ \bot \end{array}$$

Instanzen der α und β-Regel

Instanzen der α-Regel

$$\frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\begin{array}{c} \neg P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \to Q)}{\begin{array}{c} P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der α und β-Regel

Instanzen der α-Regel

$$\frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\begin{array}{c} \neg P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \rightarrow Q)}{\begin{array}{c} P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der β-Regel

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q} \qquad \frac{P \rightarrow Q}{\neg P \mid Q}$$

Ein Tableau für $\{P \wedge \neg(Q \vee \neg R),\ \neg Q \vee \neg R\}$

1.(1) $P \wedge \neg(Q \vee \neg R)$

(2) $\neg Q \vee \neg R$

(3) $\neg Q$	(4) $\neg R$
(5) P	(10) P
(6) $\neg(Q \vee \neg R)$	(11) $\neg(Q \vee \neg R)$
(7) $\neg Q$	
(8) $\neg\neg R$	
(9) R	

Dieses Tableau ist nicht “maximal”, aber der erste “Ast” ist.
Dieser Ast ist nicht “geschlossen” (enthält keinen Widerspruch), also ist die Formelmenge $\{(1), (2)\}$ erfüllbar.
(Diese Begriffe werden später erklärt.)