Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 1

29.05.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Organisatorisches

Klausur

Dienstag, 31.07.2018, 13:00s.t.-15:00, Raum D028

Anmeldung bis 23.07.2018 möglich (über KLIPS)

Rücktritt bis 24.07.2018 möglich (über KLIPS)

Rückblick: Vor- und Nachteile von Aussagenlogik

+ Aussagenlogik ist deklarativ: Syntaxelemente entsprechen Fakten

Rückblick: Vor- und Nachteile von Aussagenlogik

+ Aussagenlogik ist deklarativ: Syntaxelemente entsprechen Fakten
+ Aussagenlogik erlaubt konjunktive / disjunktive / negative Aussagen (im Gegensatz zu vielen Datenstrukturen und Datenbanken)

Rückblick: Vor- und Nachteile von Aussagenlogik

+ Aussagenlogik ist deklarativ: Syntaxelemente entsprechen Fakten
+ Aussagenlogik erlaubt konjunktive / disjunktive / negative Aussagen (im Gegensatz zu vielen Datenstrukturen und Datenbanken)
+ Aussagenlogik ist kompositional: Bedeutung von $F_1 \wedge F_2$ leitet sich ab aus der von F_1 und F_2

Rückblick: Vor- und Nachteile von Aussagenlogik

+ Aussagenlogik ist deklarativ: Syntaxelemente entsprechen Fakten
+ Aussagenlogik erlaubt konjunktive / disjunktive / negative Aussagen (im Gegensatz zu vielen Datenstrukturen und Datenbanken)
+ Aussagenlogik ist kompositional: Bedeutung von $F_1 \land F_2$ leitet sich ab aus der von F_1 und F_2
+ Bedeutung in Aussagenlogik ist kontextunabhängig (im Gegensatz zu natürlicher Sprache)

Rückblick: Vor- und Nachteile von Aussagenlogik

+ Aussagenlogik ist deklarativ: Syntaxelemente entsprechen Fakten
+ Aussagenlogik erlaubt konjunktive / disjunktive / negative Aussagen (im Gegensatz zu vielen Datenstrukturen und Datenbanken)
+ Aussagenlogik ist kompositional: Bedeutung von $F_1 \wedge F_2$ leitet sich ab aus der von F_1 und F_2
+ Bedeutung in Aussagenlogik ist kontextunabhängig (im Gegensatz zu natürlicher Sprache)

– Aussagenlogik hat nur beschränkte Ausdruckskraft (im Vergleich zu natürlicher Sprache)

Beispiele:

- Die Aussage "Jede natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade" erfordert eine Formel für jede Zahl.

Weitere Logiken

Logik		
Aussagenlogik	Fakten	wahr/falsch
Prädikatenlogik	Objekte, Funktionen, Relationen	wahr/falsch
Temporallogik	Fakten, Zeitpunkte	wahr/falsch
Mehrwertige Logik	Fakten	wahr/falsch/unbekannt
Fuzzy-Logik	Fakten	[0, 1]
...	...	...

Weitere Logiken

Logik		
Aussagenlogik	Fakten	wahr/falsch
Prädikatenlogik	Objekte, Funktionen, Relationen	wahr/falsch
Temporallogik	Fakten, Zeitpunkte	wahr/falsch
Mehrwertige Logik	Fakten	wahr/falsch/unbekannt
Fuzzy-Logik	Fakten	[0, 1]
...	...	...

Prädikatenlogik

Reichere Struktur

- Objekte (Elemente)
  Leute, Häuser, Zahlen, Theorien, Farben, Jahre, ...

Prädikatenlogik

Reichere Struktur

- Objekte (Elemente)
  Leute, Häuser, Zahlen, Theorien, Farben, Jahre, ...
- Relationen (Eigenschaften)
  rot, rund, prim, mehrstöckig, ...
  ist Bruder von, ist größer als, ist Teil von, hat Farbe, besitzt, ..
  $=$, $\geq$, ...

Prädikatenlogik

Reichere Struktur

- Objekte (Elemente)
  Leute, Häuser, Zahlen, Theorien, Farben, Jahre, ...
- Relationen (Eigenschaften)
  rot, rund, prim, mehrstöckig, ...
  ist Bruder von, ist größer als, ist Teil von, hat Farbe, besitzt, ..
  $=$, $\geq$, ...
- Funktionen
  $+$, Mitte von, Vater von, Anfang von, ...

Syntax der Prädikatenlogik

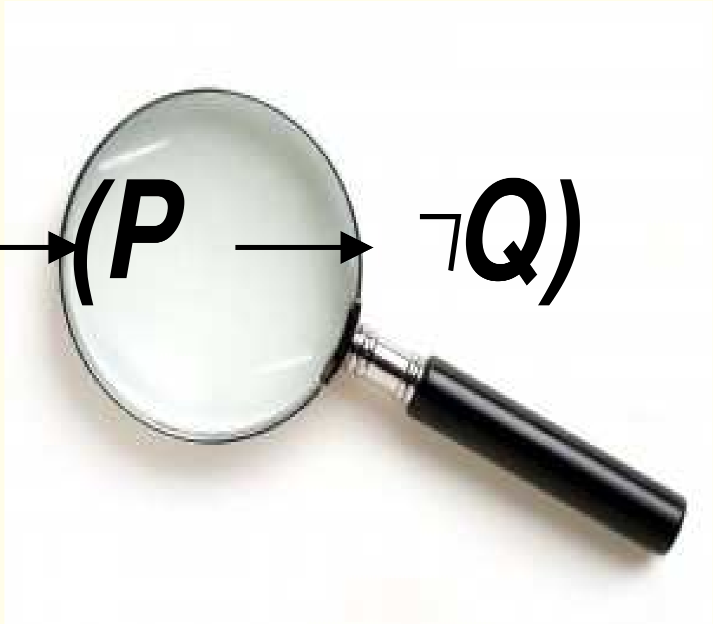
Idee

$$(P \wedge Q) \longrightarrow (P \longrightarrow \neg Q)$$

Syntax der Prädikatenlogik

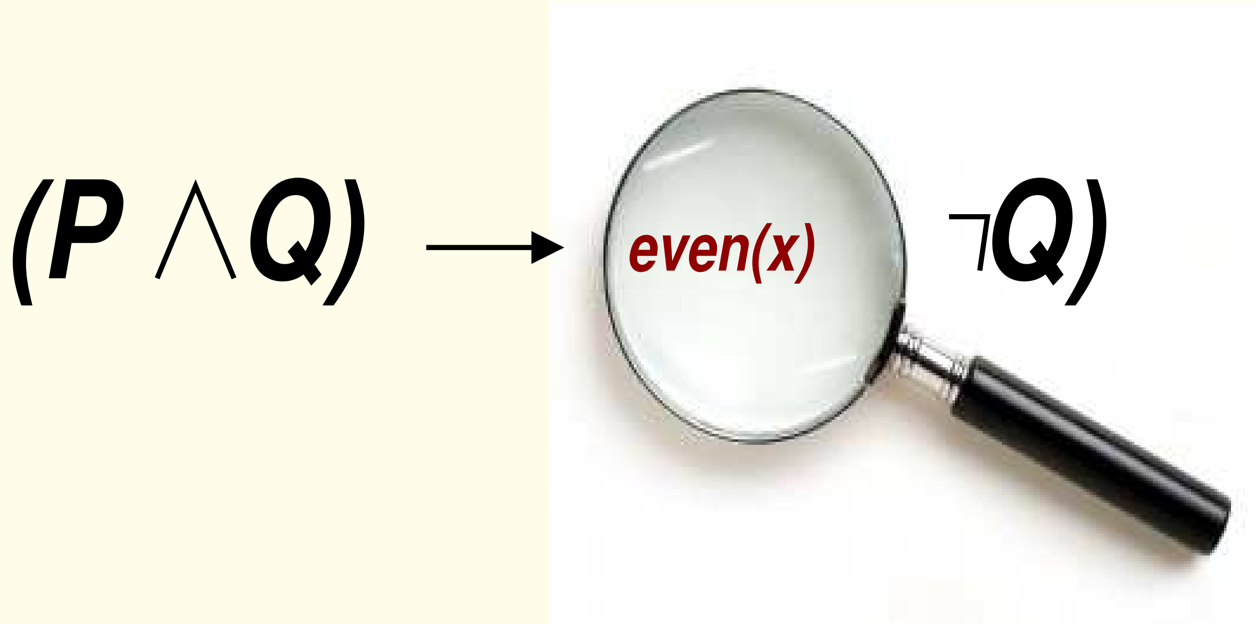
Idee

$$(P \wedge Q) \longrightarrow (P \longrightarrow \neg Q)$$



Syntax der Prädikatenlogik

Idee



Syntax der Prädikatenlogik

Idee

$$(P \wedge Q) \longrightarrow (\; even(x) \longrightarrow \neg$$

Syntax der Prädikatenlogik

Idee

$$(even(x) \wedge even(x+1)) \longrightarrow (even(x) \longrightarrow \neg\, even(x+1))$$

Syntax der Prädikatenlogik

Idee

$$(\mathit{even}(x) \bigwedge \mathit{even}(x{+}1)) \longrightarrow (\mathit{even}(x) \longrightarrow \neg\ \mathit{even}(x{+}1))$$

Semantik: Wahr in $\mathbb{N}$, für $x = 1$.

Syntax der Prädikatenlogik

Idee

$$\forall x \ (even(x) \wedge even(x+1)) \longrightarrow (even(x) \longrightarrow \neg \ even(x+1))$$

Semantik: Wahr in $\mathbb{N}$

Syntax der Prädikatenlogik: Logische Zeichen

Wie in der Aussagenlogik

$\top$ Symbol für die Formel "wahr" (Formel, die immer wahr ist)
$\bot$ Symbol für die Formel "falsch" (Formel, die immer falsch ist)

$\neg$ Negationssymbol ("nicht")

$\wedge$ Konjunktionssymbol ("und")
$\vee$ Disjunktionssymbol ("oder")
$\rightarrow$ Implikationssymbol ("wenn ... dann")
$\leftrightarrow$ Symbol für Äquivalenz ("genau dann, wenn")

( ) die beiden Klammern

Syntax der Prädikatenlogik: Logische Zeichen

Wie in der Aussagenlogik

$\top$ Symbol für die Formel "wahr" (Formel, die immer wahr ist)
$\bot$ Symbol für die Formel "falsch" (Formel, die immer falsch ist)

$\neg$ Negationssymbol ("nicht")

$\wedge$ Konjunktionssymbol ("und")
$\vee$ Disjunktionssymbol ("oder")
$\rightarrow$ Implikationssymbol ("wenn ... dann")
$\leftrightarrow$ Symbol für Äquivalenz ("genau dann, wenn")

( ) die beiden Klammern

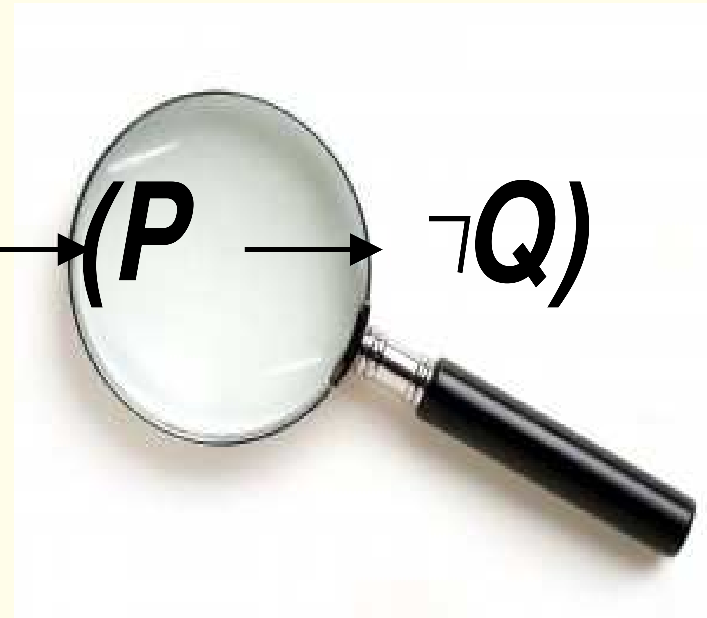
Quantoren

$\forall$ Allquantor ("für alle")
$\exists$ Existenzquantor ("es gibt")

Syntax der Prädikatenlogik

Idee

$$(P \wedge Q) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$$



Idee

$(P \wedge Q) \longrightarrow$ 

Syntax der Prädikatenlogik

Idee

$$(P \wedge Q) \longrightarrow (\; even(x) \longrightarrow \neg \; even(x+1)$$

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Signatur

Zweck: Festlegung der nichtlogischen Symbole

$$\Sigma = (\Omega, \Pi),$$

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Definition

Prädikatenlogische Signatur: Paar $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ wobei:

- Ω eine Menge von Funktionssymbolen f mit Stelligkeit $n \geq 0$, geschrieben f/n,

  z.B. 2/0, koblenz/0, c/0, sqrt/1, leftLegOf/1, $+$/2, -/2

- Π Menge von Prädikatensymbolen p mit Stelligkeit $m \geq 0$, geschrieben p/m

  z.B. bruderVon/1, even/1, $>/2, \approx/2, \ldots$

Bemerkung: Das Gleichheitsprädikat $\approx$ kann (muss aber nicht) enthalten sein. Es wird infix notiert.

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Definition.

Funktionssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstante

z.B. 1, 2, koblenz, c

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Definition.

Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstante

z.B. 1, 2, koblenz, c

Definition.

Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Variablen

Prädikatenlogik erlaubt die Formulierung abstrakter (schematischer) Aussagen. Technisches Hilfmittel hierfür sind die Variablen.

Wir nehmen an, dass

$$X$$

eine vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen ist, die wir für (die Bezeichnung von) Variablen verwenden.

Terme

Terme über Σ (bzw. Σ-Terme) werden nach folgenden syntaktischen Regeln gebildet:

$$
\begin{array}{llll}
s, t, u, v & ::= & x & , x \in X & \text{(Variable)} \\
 & \mid & f(s_1, ..., s_n) & , f/n \in \Omega & \text{(F-Terme)}
\end{array}
$$

Mit $T_\Sigma(X)$ bezeichnen wir die Menge der Σ-Terme

Menge $T_\Sigma(X)$ der Σ-Terme:

Die kleinste Menge mit: $X \subseteq T_\Sigma(X)$

Wenn
- $f \in \Omega$,
- n ist die Stelligkeit von f
- $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)$

dann $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma(X)$

Terme

Terme sind also vollständig geklammerte Ausdrücke, die wir auch als markierte, geordnete Bäume auffassen können. Die Knoten sind mit Funktionssymbolen oder Variablen markiert. Jeder mit einem Funktionssymbol f der Stelligkeit n markierte Knoten hat genau n Unterbäume, einen für jedes Argument von f.

Beispiele

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

$\Omega = \{Jan/0, Vater/1, Mutter/1\}$

$\{x, y, z\} \subseteq X$

Terme:

x	Jan
$Vater(x)$	$Vater(Jan)$
$Mutter(x)$	$Mutter(Jan)$
$Vater(Mutter(x))$	$Vater(Mutter(Jan))$

Beispiele

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

$\Omega = \{0/0, 1/0, succ/1, +/2\}$

$\{x, y, z\} \subseteq X$

Terme:

$x, y, z, 0, 1$

$succ(x), succ(0), succ(1)$

$x + y, x + z, x + 0, x + 1, (x + (succ(y) + 1)), \ldots$

Beispiele

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

$\Omega = \{0/0, 1/0, succ/1, +/2\}$

$\{x, y, z\} \subseteq X$

Terme:

$x, y, z, 0, 1$

$succ(x), succ(0), succ(1)$

$x + y, x + z, x + 0, x + 1, (x + (succ(y) + 1)), \ldots$ Infix

$+(x, y), +(x, z), +(x, 0), +(x, 1), +(x, +(succ(y), 1))$ Präfix

Atome

Atome (Atomare Formeln) über Σ genügen dieser Syntax:

$$\begin{array}{lcll} A, B & ::= & p(s_1, \ldots, s_m) & , \ p/m \in \Pi \\ \Big[& \mid & (s \approx t) & \text{(Gleichung)} \quad \Big] \end{array}$$

Ist $m = 0$, so handelt es sich bei p um eine Aussagenvariable. Wir verwenden insbesondere die Buchstaben P, Q, R, S, um Aussagenvariablen zu bezeichnen

Beispiele

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

$\Omega = \{Jan/0, Anna/0, Vater/1, Mutter/1\}$

$\Pi = \{Mann/1, Frau/1, Bruder/2, \approx/2\}$

$\{x, y, z\} \subseteq X$

Atome:

$Mann(x)$	$Mann(Jan)$	$Mann(Anna)$
$Mann(Vater(x))$	$Frau(Vater(Jan))$	$Mann(Vater(Jan))$
$Bruder(x, y)$	$Bruder(x, Jan)$	$Bruder(x, Anna)$

$Vater(Jan) \approx Vater(Anna)$

$Vater(x) \approx Mutter(y)$

Beispiele

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

$\Omega = \{0/0, 1/0, succ/1, +/2\}$

$\Pi = \{\leq, \approx, \text{even}, \text{odd}\}$

$\{x, y, z\} \subseteq X$

Atome:

$x \leq y, \quad z \approx 0, \quad 0 \leq 1$

$succ(x) \leq succ(0), \quad succ(1) \approx succ(0)$

$x + y \leq x + z, \quad x + 0 \approx x + 1 \quad (x + (succ(y) + 1)) \leq z, \ldots$ Infix

$\text{even}(succ(0)), \quad \text{even}(x), \quad \text{even}(x + 1), \quad \text{odd}(x + (succ(y) + y))$

Beispiele

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

$\Omega = \{0/0, 1/0, succ/1, +/2\}$

$\Pi = \{\leq, \approx, \text{even}, \text{odd}\}$

$\{x, y, z\} \subseteq X$

Atome:

$x \leq y, \quad z \approx 0, \quad 0 \leq 1$

$succ(x) \leq succ(0), \quad succ(1) \approx succ(0)$

$x + y \leq x + z, \quad x + 0 \approx x + 1 \quad (x + (succ(y) + 1)) \leq z, \ldots$ Infix

Präfix:

$\leq (+(x, y), +(x, z)), \quad + (x, 0) \approx +(x, 1), \quad \leq (+(x, +(succ(y), 1)), z)$

$\text{even}(succ(0)), \quad \text{even}(x), \quad \text{even}(x + 1), \quad \text{odd}(x + (succ(y) + y))$

Literale

$$
\begin{array}{llll}
L & ::= & A & \text{(positives Literal)} \\
 & \mid & \neg A & \text{(negatives Literal)}
\end{array}
$$

Beispiele:

$$
\begin{array}{ll}
Mann(Vater(x)) & Vater(Jan) \approx Vater(Anna) \\
\neg Mann(Vater(x)) & \neg(Vater(Jan) \approx Vater(Anna))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
x \leq y & (x + (succ(y) + 1)) \approx z \\
\neg x \leq y & \neg((x + (succ(y) + 1)) \approx z)
\end{array}
$$

Klauseln

$$\begin{array}{rcll} C, D & ::= & \bot & \text{(leere Klausel)} \\ & \mid & L_1 \vee \ldots \vee L_k,\ k \geq 1 & \text{(nichtleere Klausel)} \end{array}$$

Beispiele:

$\bot$

$Mann(Vater(x)) \quad \vee \quad \neg(Vater(Jan) \approx Vater(Anna))$

$\neg Frau(Vater(x))$

$\neg(x \leq y) \quad \vee \quad (x + (succ(y) + 1)) \approx z$

$x \leq y$

$\neg(x \leq y) \quad \vee \quad \neg(x \leq y) \quad \vee \quad (x \leq y)$

Formeln

Formeln über Σ:

$$
\begin{array}{rcll}
F, G, H & ::= & \bot & \text{(Falsum)} \\
 & \mid & \top & \text{(Verum)} \\
 & \mid & A & \text{(atomare Formel)} \\
 & \mid & \neg F & \text{(Negation)} \\
 & \mid & (F \wedge G) & \text{(Konjunktion)} \\
 & \mid & (F \vee G) & \text{(Disjunktion)} \\
 & \mid & (F \rightarrow G) & \text{(Implikation)} \\
 & \mid & (F \leftrightarrow G) & \text{(Äquivalenz)} \\
 & \mid & \forall x F & \text{(Allquantifizierung)} \\
 & \mid & \exists x F & \text{(Existenzquantifizierung)}
\end{array}
$$

Formeln

Menge For_Σ der Formeln über Σ:

Die kleinste Menge, die

- Alle atomaren Formeln enthält,
- $\top \in \mathrm{For}_\Sigma$, $\bot \in \mathrm{For}_\Sigma$,
- Wenn $F, G \in \mathrm{For}_\Sigma$, dann auch
  $\neg F, F \wedge G, F \vee G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G \in \mathrm{For}_\Sigma$,
- Wenn $F \in \mathrm{For}_\Sigma$ und $x \in X$, dann
  $\forall x F \in \mathrm{For}_\Sigma, \exists x F \in \mathrm{For}_\Sigma$

Konventionen zur Notation

- Klammereinsparungen werden nach folgenden Regeln vorgenommen:
  - $\neg \quad >_p \quad \wedge \quad >_p \quad \vee \quad >_p \quad \rightarrow \quad >_p \quad \leftrightarrow$ (Präzedenzen),
  - $\vee$ und $\wedge$ sind assoziativ und kommutativ.
- $Qx_1, \ldots, x_n\ F$ für $Qx_1 \ldots Qx_n\ F$.
- Terme und Atome in Infix-, Präfix-, Postfix- oder Mixfixnotation; Beispiele:

$s + t$	für $+(s, t)$
$s \leq t$	für $\leq (s, t)$
$-s$	für $-(s)$
0	für $0()$

Beispiel

“Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau”

Beispiel

"Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau"

$\Omega = \{koblenz/0\} \quad \Pi = \{studiertIn/2, schlau/1\}$

Beispiel

"Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau"

$\Omega = \{koblenz/0\} \qquad \Pi = \{studiertIn/2, schlau/1\}$

$$\underbrace{\forall x(\underbrace{\underbrace{studiertIn(\underbrace{x}_{\substack{\text{Variable}\\ \text{Term}}}, \underbrace{koblenz}_{\substack{\text{Konstante}\\ \text{Term}}})}_{\text{Atom}} \to \underbrace{schlau(\underbrace{x}_{\substack{\text{Variable}\\ \text{Term}}})}_{\text{Atom}}}_{\text{Formel}})}_{\text{Formel}}$$

Beispiel

"Es gibt jemand, der in Landau studiert und schlau ist"

$\Omega = \{landau/0\} \quad \Pi = \{studiertIn/2, schlau/1\}$

$$\underbrace{\exists x(\underbrace{\underbrace{studiertIn(\underbrace{x}_{\substack{Variable\\ Term}}, \underbrace{landau}_{\substack{Konstante\\ Term}})}_{Atom} \land \underbrace{schlau(\underbrace{x}_{\substack{Variable\\ Term}})}_{Atom}}_{Formel})}_{Formel}$$

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x						
a						
$f(g(a, y, b), x)$						
$g(a, x)$						
$p(g(a, y, b), x)$						
$p(q(a), b)$						
$\neg q(g(a, b, x))$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$						
$\forall x(p(x, f(x, x)))$						
$\forall b(p(b, f(b, b)))$						

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$						
$g(a, x)$						
$p(g(a, y, b), x)$						
$p(q(a), b)$						
$\neg q(g(a, b, x))$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$						
$\forall x(p(x, f(x, x)))$						
$\forall b(p(b, f(b, b)))$						

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$g(a, x)$						
$p(g(a, y, b), x)$						
$p(q(a), b)$						
$\neg q(g(a, b, x))$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$						
$\forall x(p(x, f(x, x)))$						
$\forall b(p(b, f(b, b)))$						

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$g(a, x)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$p(g(a, y, b), x)$						
$p(q(a), b)$						
$\neg q(g(a, b, x))$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$						
$\forall x(p(x, f(x, x)))$						
$\forall b(p(b, f(b, b)))$						

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$g(a, x)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$p(g(a, y, b), x)$	nein	ja	ja	ja	ja	nein
$p(q(a), b)$						
$\neg q(g(a, b, x))$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$						
$\forall x(p(x, f(x, x)))$						
$\forall b(p(b, f(b, b)))$						

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$g(a, x)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$p(g(a, y, b), x)$	nein	ja	ja	ja	ja	nein
$p(q(a), b)$						
$\neg q(g(a, b, x))$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$						
$\forall x(p(x, f(x, x)))$						
$\forall b(p(b, f(b, b)))$						

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$g(a, x)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$p(g(a, y, b), x)$	nein	ja	ja	ja	ja	nein
$p(q(a), b)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x))$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$						
$\forall x(p(x, f(x, x)))$						
$\forall b(p(b, f(b, b)))$						

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\quad \Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$g(a, x)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$p(g(a, y, b), x)$	nein	ja	ja	ja	ja	nein
$p(q(a), b)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x))$	nein	nein	ja	ja	ja	nein
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$						
$\forall x(p(x, f(x, x)))$						
$\forall b(p(b, f(b, b)))$						

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$g(a, x)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$p(g(a, y, b), x)$	nein	ja	ja	ja	ja	nein
$p(q(a), b)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x))$	nein	nein	ja	ja	ja	nein
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$						
$\forall x(p(x, f(x, x)))$						
$\forall b(p(b, f(b, b)))$						

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$g(a, x)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$p(g(a, y, b), x)$	nein	ja	ja	ja	ja	nein
$p(q(a), b)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x))$	nein	nein	ja	ja	ja	nein
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$	nein	nein	nein	ja	ja	nein
$\forall x(p(x, f(x, x)))$						
$\forall b(p(b, f(b, b)))$						

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$g(a, x)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$p(g(a, y, b), x)$	nein	ja	ja	ja	ja	nein
$p(q(a), b)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x))$	nein	nein	ja	ja	ja	nein
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$	nein	nein	nein	ja	ja	nein
$\forall x(p(x, f(x, x)))$	nein	nein	nein	nein	ja	nein
$\forall b(p(b, f(b, b)))$						

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$g(a, x)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$p(g(a, y, b), x)$	nein	ja	ja	ja	ja	nein
$p(q(a), b)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x))$	nein	nein	ja	ja	ja	nein
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$	nein	nein	nein	ja	ja	nein
$\forall x(p(x, f(x, x)))$	nein	nein	nein	nein	ja	nein
$\forall b(p(b, f(b, b)))$	nein	nein	nein	nein	nein	ja