Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 3

12.06.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Prädikatenlogik

Syntax

1. **Logische Symbole:**
   1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top, \bot; \neg; \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
   1.2: Quantoren: $\forall$, $\exists$.

2. **Nichtlogische Symbole:** Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,
   2.1: Ω Menge von Funktionssymbolen. Notation: f/n: f hat Stelligkeit $n \geq 0$,
   2.2: Π Menge von Prädikatensymbolen. Notation: p/m: p hat Stelligkeit $m \geq 0$.
   (Das Gleichheitsprädikat $\approx$ kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

   Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstanten.

   Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen.

3. **Variablen:** X vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen, die wir für (die Bezeichnung von) Variablen verwenden.

Bis jetzt

Prädikatenlogik

- Syntax
  - Signatur
  - Terme
  - Formeln
  - Substitutionen
- Semantik

Strukturen

Definition.

Eine Σ-Struktur (bzw. Σ-Interpretation bzw. Σ-Modell) ist ein Tripel

$$\mathcal{A} = (U,\ (f_{\mathcal{A}} : U^n \to U)_{f/n \in \Omega},\ (p_{\mathcal{A}} \subseteq U^m)_{p/m \in \Pi})$$

wobei $U \neq \emptyset$ eine Menge, genannt Universum von $\mathcal{A}$.

Oft identifizieren wir U mit $\mathcal{A}$, wenn die Interpretation der Funktions- und Prädikatensymbole eindeutig aus dem Kontext hervorgeht.

Mit Σ-Str bezeichnen wir die Menge aller Σ-Strukturen.

Valuationen

Variablen für sich haben keine Bedeutung. Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Definition.

Unter einer (Variablen-) Belegung oder einer Valuation (über einer Σ-Struktur $\mathcal{A}$) versteht man eine Abbildung

$$\beta : X \to U$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β, $\mathcal{A}(\beta)(t)$:

- Falls $t = x \in X$: $\mathcal{A}(\beta)(t) = \beta(x)$
- Falls $t = c$ eine Konstante: $\mathcal{A}(\beta)(t) = c_{\mathcal{A}}$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β, $\mathcal{A}(\beta)(t)$:

- Falls $t = x \in X$: $\mathcal{A}(\beta)(t) = \beta(x)$
- Falls $t = c$ eine Konstante: $\mathcal{A}(\beta)(t) = c_{\mathcal{A}}$
- Falls $t = f(t_1, \ldots, t_n)$:
  $\mathcal{A}(\beta)(t) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(t_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(t_n))$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Beispiel:

$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \{0_{\mathcal{N}}, +_{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}, \{\leq_{\mathcal{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \approx_{\mathcal{N}}\})$

$0_{\mathcal{N}} = 0 \in \mathbb{N}$,
$+_{\mathcal{N}} (n_1, n_1) = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$

$\beta : \{x, y, z\} \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 5, \beta(y) = 10, \beta(z) = 3$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(\beta)((x + (y + z)) + (z + 0)) = \\
&\quad = (\beta(x) +_{\mathcal{N}} (\beta(y) +_{\mathcal{N}} \beta(z))) +_{\mathcal{N}} (\beta(z) +_{\mathcal{N}} 0_{\mathcal{N}}) = \\
&\quad = (5 + (10 + 3)) + (3 + 0) = 21
\end{aligned}$$

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Die Menge der Wahrheitswerte sei $\{0, 1\}$.

$\mathcal{A}(\beta) : \mathrm{For}_\Sigma \to \{0, 1\}$ wird induktiv über Aufbau von F wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}(\beta)(\bot) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(\top) = 1$$

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(p(s_1, \ldots, s_n)) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad (\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)) \in p_{\mathcal{A}}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(s \approx t) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(s) = \mathcal{A}(\beta)(t)$$

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = \neg_b \mathcal{A}(\beta)(F)$, wobei $\neg_b$ die Negation auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

w	$\neg_b w$
0	1
1	0

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \wedge G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \wedge_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei $\wedge_b$ die Konjunktion auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

$\wedge_b$	0	1
0	0	0
1	0	1

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \vee G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \vee_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei $\vee_b$ die Disjunktion auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

$\vee_b$	0	1
0	0	1
1	1	1

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \to G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \to_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei $\to_b$ die Implikation auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

$\to_b$	0	1
0	1	1
1	0	1

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \leftrightarrow G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \leftrightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei $\leftrightarrow_b$ die Äquivalenz auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

$\leftrightarrow_b$	0	1
0	1	0
1	0	1

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ mit Gleichheit $\approx$.

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & \{\leq, <_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\;) \\
\qquad n_1 +_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 + n_2 & \quad (n_1, n_2) \in \leq_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N} \\
\qquad n_1 *_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 \cdot n_2 & \quad (n_1, n_2) \in <_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N} \\
\quad s_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & \text{gerade}_{\mathcal{A}}, \text{ungerade}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}\} \\
\qquad s(n) = n + 1 & \quad \text{gerade}_{\mathcal{A}} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\} \\
\quad 0_{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}\} & \quad \text{ungerade}_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},
\end{array}
$$

Konvention: Auf den nächsten Folien wird der Unterschied zwischen den natürlichen Zahlen 0, 1 und den Wahrheitswerten 0 (falsch) und 1 (wahr) deutlich gemacht, indem wir die Wahrheitswerte in orangener Farbe schreiben.

Nota Bene:

- Der Wert eines Termes t in $\mathcal{A}$ bzgl. β ist ein Element in das Universum von $\mathcal{A}$.
- Der Wahrheitswert einer Formel F in $\mathcal{A}$ bzgl. β ist ein Wahrheitswert (0 oder 1).

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ mit Gleichheit $\approx$.

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$

$n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2$

$n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2$

$\mathrm{s}_\mathcal{A} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$

$\mathrm{s}(n) = n + 1$

$0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\}$

$\{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ )$

$(n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A}$ iff $n_1 \leq n_2$ in $\mathbb{N}$

$(n_1, n_2) \in <_\mathcal{A}$ iff $n_1 < n_2$ in $\mathbb{N}$

$\text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\}$

$\text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$

$\text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},$

$\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(1) $\mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = 0$ Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x) = \ 1 \notin \text{gerade}_\mathcal{A}$

(2) $\mathcal{A}(\beta))(s(s(x) + s(0)) \approx y) = 1$ Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(s(s(x) + s(0))) = s_\mathcal{A}(s_\mathcal{A}(\beta(x)) +_\mathcal{A} s_\mathcal{A}(0_\mathcal{A}))$

$= ((1+1)+(0+1))+1 = 4$

$\mathcal{A}(\beta)(y) = 4$

und $4 = 4$

(3) $\mathcal{A}(\beta))(x \approx y) = 0$ Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x) = 1; \quad \mathcal{A}(\beta)(y) = 4, \quad 1 \neq 4$

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$.

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$

$n_1 +_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 + n_2$

$n_1 *_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 \cdot n_2$

$\text{s}_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$

$\text{s}(n) = n + 1$

$0_{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}\}$

$\{\leq, <_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ )$

$(n_1, n_2) \in \leq_{\mathcal{A}}$ iff $n_1 \leq n_2$ in $\mathbb{N}$

$(n_1, n_2) \in <_{\mathcal{A}}$ iff $n_1 < n_2$ in $\mathbb{N}$

$\text{gerade}_{\mathcal{A}}, \text{ungerade}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}\}$

$\text{gerade}_{\mathcal{A}} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$

$\text{ungerade}_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},$

$\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(4) $\mathcal{A}(\beta)(\neg\text{gerade}(x)) = \neg_b \mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = \neg_b 0 = 1$

(5) $\mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0) \vee \text{gerade}(x)) = \mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0)) \vee_b \mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = 1 \vee_b 0 = 1$

Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0)) = 1 : \mathcal{A}(\beta)(x) = 1, \mathcal{A}(s(0)) = s_{\mathcal{A}}(0_{\mathcal{A}}) = 0 + 1 = 1$, und $(1, 1) \in \leq_{\mathcal{A}}$.

(6) $\mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0) \to \text{ungerade}(y)) = \mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0)) \to_b \mathcal{A}(\beta)(\text{ungerade}(y)) = 0 \to_b 0 = 1$

Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0)) = 0,$ da $\beta(y) = 4, \beta(s(0)) = 1$ und $(4, 1) \notin \leq_{\mathcal{A}}$;

$\mathcal{A}(\beta)(\text{ungerade}(y)) = 0$ da $\beta(y) = 4 \notin \text{ungerade}_{\mathcal{A}}$.

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\forall x F) = \min_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für alle } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(\exists x F) = \max_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für mindestens} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ein } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \in X$ und $a \in U$ bezeichne $\beta[x \mapsto a] : X \to U$ die Belegung, mit

$$\beta[x \mapsto a](y) := \begin{cases} a & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\forall x F) = \min_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für alle } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(\exists x F) = \max_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für mindestens} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ein } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \in X$ und $a \in U$ bezeichne $\beta[x \mapsto a] : X \to U$ die Belegung, mit

$$\beta[x \mapsto a](y) := \begin{cases} a & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Intuition: $\forall$: verallgemeinerte Konjunktion ($\wedge_b$ ist minimum auf $\{0, 1\}$)
$\exists$: verallgemeinerte Disjunktion ($\vee_b$ ist maximum auf $\{0, 1\}$)

Drei Logiker kommen in eine Bar

“Wollt ihr alle ein Bier?”, fragt die Kellnerin.

“Weiß ich nicht”, sagt der erste Logiker.

“Weiß ich nicht”, sagt der zweite Logiker.

“Ja!”, sagt der dritte Logiker.

Erklärung des Witzes

Logiker 1 will ein Bier, aber er weiß nicht, was seine Begleiter wollen, deshalb kann er die Frage weder mit "ja" noch mit "nein" beantworten.

Logiker 2 kann aus der Antwort von Logiker 1 schließen, dass der Durst auf ein Bier hat. Denn wäre das nicht der Fall, dann könnte er die Frage mit "nein" beantworten

(ein Satz, der mit "Alle" beginnt, wird schon durch eine einzige Ausnahme falsch.)

Logiker 2 möchte auch gern ein Bier, aber weil er nichts über den Durst von Logiker 3 weiß, muss er auch mit "Weiß ich nicht" antworten.

Erst Logiker 3 kann eine definitive Antwort geben: Er weiß, dass seine beiden Begleiter ein Bier trinken möchten, er selber möchte auch eins - also antwortet er mit "Ja!"

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$.

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$
$n_1 +_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 + n_2$
$n_1 *_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 \cdot n_2$

$s_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$
$s(n) = n + 1$
$0_{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}\}$

$\{\leq, <_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ )$
$(n_1, n_2) \in \leq_{\mathcal{A}}$ iff $n_1 \leq n_2$ in $\mathbb{N}$
$(n_1, n_2) \in <_{\mathcal{A}}$ iff $n_1 < n_2$ in $\mathbb{N}$

$\text{gerade}_{\mathcal{A}}, \text{ungerade}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}\}$
$\text{gerade}_{\mathcal{A}} = \{0, 2, 4, \dots, 2k \dots\}$
$\text{ungerade}_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1 \dots\},$

$\beta : X \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(7) $\mathcal{A}(\beta)(\forall x \text{gerade}(x)) = \min_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$

Erklärung:
Falls $a = 2k$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \in \text{gerade}_{\mathcal{A}}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$.
Falls $a = 2k + 1$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \notin \text{gerade}_{\mathcal{A}}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$.

Es gibt $a \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$.
$\min_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = \min\{1, 0\} = 0$

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$.

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$
$\quad n_1 +_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 + n_2$
$\quad n_1 *_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 \cdot n_2$

$\quad \mathrm{s}_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$
$\quad \mathrm{s}(n) = n + 1$
$\quad 0_{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}\}$

$\{\leq, <_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\;)$
$\quad (n_1, n_2) \in \leq_{\mathcal{A}}$ iff $n_1 \leq n_2$ in $\mathbb{N}$
$\quad (n_1, n_2) \in <_{\mathcal{A}}$ iff $n_1 < n_2$ in $\mathbb{N}$

$\text{gerade}_{\mathcal{A}}, \text{ungerade}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}\}$
$\quad \text{gerade}_{\mathcal{A}} = \{0, 2, 4, \dots, 2k \dots\}$
$\quad \text{ungerade}_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1 \dots\},$

$\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(8) $\mathcal{A}(\beta)(\exists x \text{gerade}(x)) = \max\limits_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$

Erklärung:
Falls $a = 2k$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \in \text{gerade}_{\mathcal{A}}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$.
Falls $a = 2k + 1$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \notin \text{gerade}_{\mathcal{A}}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$.

Es gibt $a \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$.
$\quad \max\limits_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = \max\{1, 0\} = 1$

Beispiel 2

$$U_{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$0_{\mathbb{N}} = 0 \in U_{\mathbb{N}}$$
$$s_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}} \to U_{\mathbb{N}},\ s_{\mathbb{N}}(n) = n + 1$$
$$+_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}}^2 \to U_{\mathbb{N}},\ \ +_{\mathbb{N}} (n, m) = n + m$$
$$*_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}}^2 \to U_{\mathbb{N}},\ \ *_{\mathbb{N}} (n, m) = n * m$$
$$\leq_{\mathbb{N}} = \text{ “kleiner-gleich” } \subseteq U_{\mathbb{N}}^2$$
$$<_{\mathbb{N}} = \text{ “kleiner” } \subseteq U_{\mathbb{N}}^2$$

Mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 3$ ergibt sich beispielsweise:

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{N}(\beta)(s(x) + s(0)) & = & 3 \\
\mathbb{N}(\beta)(x + y \approx s(y)) & = & 1 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall x, y(x + y \approx y + x)) & = & 1 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall z\ z \leq y) & = & 0 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall x \exists y\ x < y) & = & 1
\end{array}$$

Beispiel 2

(1) $\mathbb{N}(\beta)(s(x) + s(0)) = s_{\mathbb{N}}(\beta(x)) +_{\mathbb{N}} s_{\mathbb{N}}(0_{\mathbb{N}}) = (1 + 1) + (0 + 1) = 3$

(2) $\mathbb{N}(\beta)(x + y \approx s(y)) = 1$

Erklärung:

$$\mathbb{N}(\beta)(x + y) = \beta(x) +_{\mathbb{N}} \beta(y) = 1 + 3 = 4$$
$$\mathbb{N}(\beta)(s(y)) = s_{\mathbb{N}}(\beta(y)) = 3 + 1 = 4.$$

(3)
$$\begin{aligned}\mathbb{N}(\beta)(\forall x, y(x + y \approx y + x)) &= \min_{a \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a])(\forall y(x + y \approx y + x)) \\ &= \min_{a \in \mathbb{N}} \min_{b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x + y \approx y + x) \\ &= \min_{a,b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x + y \approx y + x) \\ &= 1\end{aligned}$$

da für alle $a, b \in \mathbb{N}$:

$\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x + y) = a + b = b + a = \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(y + x)$

Beispiel 2

(4) $\mathbb{N}(\beta)(\forall z\ z \leq y) = \min_{a \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z \leq y) = 0$

Erklärung:

Falls $a = 4$, so $\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z \leq y) = 0$, da:

$\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z) = a = 4$
$\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(y) = \beta(y) = 3$
und $(4,3) \notin \leq_{\mathbb{N}}$.

(5) $\mathbb{N}(\beta)(\forall x \exists y\ x < y) = \min_{a \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a])(\exists y\ x < y)$

$$= \min_{a \in \mathbb{N}} \max_{b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$$

Erklärung:

Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$: $\max_{b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$,

da es gibt $b = a + 1 \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$

weil $\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x) = a$

$\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(y) = b = a + 1$ und $(a, a+1) \in <_{\mathbb{N}}$.

Modelle, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Definition. F gilt in $\mathcal{A}$ unter β:

$$\mathcal{A}, \beta \models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A}(\beta)(F) = 1$$

Definition. F gilt in $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ ist Modell von F):

$$\mathcal{A} \models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta \models F, \text{ für alle } \beta : X \to U_{\mathcal{A}}$$

Definition. F ist (allgemein-) gültig:

$$\models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A} \models F, \text{ für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str}$$

Definition. F heißt erfüllbar gdw. es $\mathcal{A}$ und β gibt, so dass $\mathcal{A}, \beta \models F$.
Sonst heißt F unerfüllbar.

Folgerung und Äquivalenz

Definition. F impliziert G (oder G folgt aus F), i.Z. $F \models G$
gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ gilt:
Falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Definition. F und G sind äquivalent
gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ gilt:
$\mathcal{A}, \beta \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise:

Definition. $N \models G$ gdw.
für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$:
falls ($\mathcal{A}, \beta \models F$, für alle $F \in N$), so ($\mathcal{A}, \beta \models G$).

Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

Satz. $F \models G$ gdw. $(F \rightarrow G)$ ist gültig

Satz. F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

Satz. $F \models G$ gdw. $(F \rightarrow G)$ ist gültig

Beweis

$F \models G$ gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$: Falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.

gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}(\beta)(F) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G) = 1$

gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}(\beta)(F \rightarrow G) = 1$

Satz. F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

Satz. $F \models G$ gdw. $(F \rightarrow G)$ ist gültig

Beweis

$$\begin{array}{lll} F \models G & \text{gdw.} & \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}\text{: Falls } \mathcal{A}, \beta \models F\text{, so } \mathcal{A}, \beta \models G. \\ & \text{gdw.} & \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}\text{: } \mathcal{A}(\beta)(F) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G) = 1 \\ & \text{gdw.} & \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}\text{: } \mathcal{A}(\beta)(F \rightarrow G) = 1 \end{array}$$

Satz. F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Beweis

$$\begin{array}{lll} F \text{ und } G \text{ sind äquivalent} & \text{gdw.} & F \models G \text{ und } F \models G \\ & \text{gdw.} & \models F \rightarrow G \text{ und } \models G \rightarrow F \\ & \text{gdw.} & \models F \leftrightarrow G \end{array}$$

Gültigkeit und Unerfüllbarkeit

Nachweis von Gültigkeit (und damit Folgerung oder Äquivalenz) durch Unerfüllbarkeitstest:

F gültig genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar

$N \models F$ genau dann, wenn $N \cup \neg F$ unerfüllbar

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$ ist das gleiche wie $\forall y \forall x$

$\exists x \exists y$ ist das gleiche wie $\exists y \exists x$

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$ ist das gleiche wie $\forall y \forall x$

$\exists x \exists y$ ist das gleiche wie $\exists y \exists x$

Informell: Für jede Formel F gilt: $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$; $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$.

Theorem

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

(1) $\forall x \forall y\, F \equiv \forall y \forall x\, F$

(2) $\exists x \exists y\, F \equiv \exists y \exists x\, F$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Beispiel:

$\forall x \exists y \quad Mutter(y, x)$ Jeder hat eine Mutter (richtig)

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Beispiel:

$\forall x \exists y \quad \mathit{Mutter}(y, x)$ Jeder hat eine Mutter (richtig)

$\exists y \forall x \quad \mathit{Mutter}(y, x)$ Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist (falsch)

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Beispiel:

$\forall x \exists y \quad Mutter(y, x)$ Jeder hat eine Mutter (richtig)

$\exists y \forall x \quad Mutter(y, x)$ Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist (falsch)

Bemerkung: $\forall x \exists y F \equiv \exists y \forall x F$ gilt nicht immer.
Es gibt eine Formel F so dass $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ nicht logisch äquivalent.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

$$\exists x \forall y\, F \models \forall y \exists x\, F$$

Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und eine Formel F mit:

$$\forall x \exists y\, F \not\models \exists y \forall x\, F$$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg \exists x \neg \ldots$

$\exists x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg \forall x \neg \ldots$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\exists x \neg \ldots$

$\exists x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\forall x \neg \ldots$

Beispiel:

$\forall x \, \mathrm{mag}(x, \mathrm{eiscreme})$ ist das gleiche wie $\neg\exists x \, \neg\mathrm{mag}(x, \mathrm{eiscreme})$

$\exists x \, \mathrm{mag}(x, \mathrm{broccoli})$ ist das gleiche wie $\neg\forall x \, \neg\mathrm{mag}(x, \mathrm{broccoli})$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\exists x \neg \ldots$

$\exists x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\forall x \neg \ldots$

Beispiel:

$\forall x\, \text{mag}(x, \text{eiscreme})$ ist das gleiche wie $\neg\exists x\, \neg\text{mag}(x, \text{eiscreme})$

$\exists x\, \text{mag}(x, \text{broccoli})$ ist das gleiche wie $\neg\forall x\, \neg\text{mag}(x, \text{broccoli})$

Informell: Für jede Formel F gilt: $\forall x F \equiv \neg\exists x \neg F$; $\exists x F \equiv \neg\forall x \neg F$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

(1) $\quad \forall x\, F \equiv \neg\exists x\, \neg F$

(2) $\quad \exists x\, F \equiv \neg\forall x\, \neg F$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x(\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x(\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\,(\mathit{studiert}(x) \wedge \mathit{arbeitet}(x))$ ist das gleiche wie

$(\forall x\,\mathit{studiert}(x)) \wedge (\forall x\,\mathit{arbeitet}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x(\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\,(\mathit{studiert}(x) \wedge \mathit{arbeitet}(x))$ ist das gleiche wie

$(\forall x\, \mathit{studiert}(x)) \wedge (\forall x\, \mathit{arbeitet}(x))$

Informell: Für alle Formeln F, G gilt: $\forall x(F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F, G gilt:

$$\forall x(F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\vee$

$\exists x(\ldots \vee \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\vee$

$\exists x(\ldots \vee \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\, (\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist das gleiche wie

$(\exists x\, \mathit{gerade}(x)) \vee (\exists x\, \mathit{ungerade}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\vee$

$\exists x(\ldots \vee \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x\ldots) \vee (\exists x\ldots)$

Beispiel

$\exists x\,(\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist das gleiche wie

$(\exists x\,\mathit{gerade}(x)) \vee (\exists x\,\mathit{ungerade}(x))$

Informell: Für alle Formeln F, G gilt: $\exists x(F \vee G) \equiv \exists xF \vee \exists xG$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F, G gilt:

$$\exists x\,(F \vee G) \equiv (\exists x\,F) \vee (\exists x\,G)$$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x(\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x(\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\, (\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie

$(\forall x\, \mathit{gerade}(x)) \vee (\forall x\, \mathit{ungerade}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x(\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\,(\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie

$(\forall x\, \mathit{gerade}(x)) \vee (\forall x\, \mathit{ungerade}(x))$

Theorem. Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und Σ-Formeln F, G mit:

$$\forall x(F \vee G) \not\equiv \forall xF \vee \forall xG$$

(1) $\forall xF \vee \forall xG \models \forall x(F \vee G)$
(2) $\forall x(F \vee G) \not\models \forall xF \vee \forall xG$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \ldots) \wedge (\exists x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \ldots) \wedge (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\,(gerade(x) \wedge ungerade(x))$ ist NICHT das gleiche wie
$(\exists x\, gerade(x)) \wedge (\exists x\, ungerade(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \ldots) \wedge (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\, (\mathit{gerade}(x) \wedge \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie
$(\exists x\, \mathit{gerade}(x)) \wedge (\exists x\, \mathit{ungerade}(x))$

Theorem. Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und Σ-Formeln F, G mit:

$$\exists x(F \wedge G) \not\equiv \exists x F \wedge \exists x G$$

(1) $\exists x(F \wedge G) \models \exists x F \wedge \exists x G$
(2) $\exists x F \wedge \exists x G \not\models \exists x(F \wedge G)$

Zusammenfassung

Wichtige Äquivalenzen

- $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
- $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

- $\forall x(F \wedge G) \equiv (\forall x F) \wedge (\forall x G)$
- $\exists x(F \vee G) \equiv (\exists x F) \vee (\exists x G)$

- $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$ $\qquad$ $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
- $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$ $\qquad$ $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

Wichtige Äquivalenzen (Zusammenfassung)

- $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
- $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

- $\forall x (F \wedge G) \equiv (\forall x F) \wedge (\forall x G)$
- $\exists x (F \vee G) \equiv (\exists x F) \vee (\exists x G)$

- $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$ $\qquad\qquad \neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
- $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$ $\qquad\qquad \neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

Falls x in der Formel H nicht vorkommt, dann:

- $(\forall x F(x)) \vee H \equiv \forall x (F(x) \vee H)$
- $(\forall x F(x)) \wedge H \equiv \forall x (F(x) \wedge H)$
- $(\exists x F(x)) \vee H \equiv \exists x (F(x) \vee H)$
- $(\exists x F(x)) \wedge H \equiv \exists x (F(x) \wedge H)$

Zusammenfassung

Aber Vorsicht

$\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$

- $\exists y \forall x F \models \forall x \exists y F$
- $\forall x \exists y F \not\models \exists y \forall x F$

$\forall x (F \vee G) \not\equiv (\forall x F) \vee (\forall x G)$

- $(\forall x F) \vee (\forall x G) \models \forall x (F \vee G)$
- $\forall x (F \vee G) \not\models \forall x F \vee \forall x G$

$\exists x (F \wedge G) \not\equiv (\exists x F) \wedge (\exists x G)$

- $\exists x (F \wedge G) \models (\exists x F) \wedge (\exists x G)$
- $(\exists x F) \wedge (\exists x G) \not\models \exists x (F \wedge G)$

Andere wichtige Äquivalenzen

$(F \wedge F) \equiv F$	$(F \vee F) \equiv F$	(Idempotenz)
$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$	$(F \vee G) \equiv (G \vee F)$	(Kommutativität)
$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$ $(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H)$		(Assoziativität)
$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$ $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$		(Absorption)
$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$		(Distributivität)
$(\neg\neg F) \equiv F$		(Doppelte Negation)
$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$		(De Morgan's Regeln)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$		(Kontraposition)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$		(Elimination Implikation)
$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$		(Elimination Äquivalenz)

Strukturelle Induction

- für Terme
- für Formeln in Prädikatenlogik

Strukturelle Induktion: Terme

Menge $T_\Sigma(X)$ der Σ-Terme:

Die kleinste Menge mit:

- $X \subseteq T_\Sigma(X)$
- Wenn
  - $f \in \Omega$,
  - n ist die Stelligkeit von f
  - $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)$

  dann $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma(X)$

Strukturelle Induktion: Terme

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

Sei $p(t)$ eine Eigenschaft der Σ-Terme in Prädikatenlogik

Behauptung: Für alle Terme t, $p(t)$ gilt

Beweis durch strukturelle Induktion:

Induktionsbasis: Zu zeigen:
$p(t)$ gilt für $t \in X$ und für alle Konstanten.

Sei t ein Term (nicht Variable oder Konstante).
Induktionsvoraussetzung:
$p(s)$ gilt für alle Teilterme s von t (mit $s \neq t$)

Induktionsschritt: Zu zeigen: $p(t)$ gilt:

Fallunterschied über alle $f \in \Omega$ mit $t = f(t_1, \dots, t_n)$.

Strukturelle Induktion: Formeln

Menge For_Σ **der Formeln über** Σ**:**

Die kleinste Menge, die

- Alle atomaren Formeln enthält,
- $\top \in \mathrm{For}_\Sigma$, $\bot \in \mathrm{For}_\Sigma$,
- Wenn $F, G \in \mathrm{For}_\Sigma$, dann auch $\neg F, F \land G, F \lor G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G \in \mathrm{For}_\Sigma$,
- Wenn $F \in \mathrm{For}_\Sigma$ und $x \in X$, dann $\forall x F \in \mathrm{For}_\Sigma, \exists x F \in \mathrm{For}_\Sigma$

Strukturelle Induktion: Formeln

Sei $p(F)$ eine Eigenschaft der Σ-Formeln in Prädikatenlogik

Behauptung: Für alle Formeln F, $p(F)$ gilt

Beweis durch strukturelle Induktion:

Induktionsbasis: Zu zeigen:
$p(F)$ gilt für $F \in \{\top, \bot\}$ und für alle atomaren Formeln.

Sei F eine Formel (nicht atomar oder $\top$ oder $\bot$).
Induktionsvoraussetzung:
$p(G)$ gilt für alle Teilformeln G von F (mit $G \neq F$)

Induktionsschritt: Zu zeigen: $p(F)$ gilt:

Fall 1	$F = \neg G$	Fall 2	$F = G_1 \vee G_2$
Fall 3	$F = G_1 \wedge G_2$	Fall 4	$F = G_1 \rightarrow G_2$
Fall 5	$F = G_1 \leftrightarrow G_2$	Fall 6	$F = \forall x G$
		Fall 7	$F = \exists x G$