

Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 3

14.06.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Prädikatenlogik

Syntax

1. Logische Symbole:

1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top, \perp; \neg; \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

1.2: Quantoren: \forall, \exists .

2. Nichtlogische Symbole: Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,

2.1: Ω Menge von Funktionssymbolen. **Notation:** f/n : f hat Stelligkeit $n \geq 0$,

2.2: Π Menge von Prädikatensymbolen. **Notation:** p/m : p hat Stelligkeit $m \geq 0$.

(Das Gleichheitsprädikat \approx kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

Funktionssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstanten.

Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen.

3. Variablen: X vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen, die wir für (die Bezeichnung von) **Variablen** verwenden.

Bis jetzt

Prädikatenlogik

- Syntax

- Signatur
- Terme
- Formeln
- Substitutionen

- Semantik

- Σ -Struktur
- Valuation (über einer Σ -Struktur \mathcal{A})
- Wert eines Terms in \mathcal{A} bzgl. β
- Wahrheitswert einer Formel in \mathcal{A} bzgl. β

Modelle, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Definition. F gilt in \mathcal{A} unter β :

$$\mathcal{A}, \beta \models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A}(\beta)(F) = 1$$

Definition. F gilt in \mathcal{A} (\mathcal{A} ist Modell von F):

$$\mathcal{A} \models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta \models F, \text{ für alle } \beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$$

Definition. F ist (allgemein-) gültig:

$$\models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A} \models F, \text{ für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str}$$

Definition. F heißt erfüllbar gdw. es \mathcal{A} und β gibt, so dass $\mathcal{A}, \beta \models F$.
Sonst heißt F unerfüllbar.

Folgerung und Äquivalenz

Definition. F impliziert G (oder G folgt aus F), i.Z. $F \models G$

gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$ -Str und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ gilt:

Falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Definition. F und G sind äquivalent

gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$ -Str und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ gilt:

$\mathcal{A}, \beta \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise:

Definition. $N \models G$ gdw.

für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$ -Str und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$:

falls $(\mathcal{A}, \beta \models F, \text{ für alle } F \in N)$, so $(\mathcal{A}, \beta \models G)$.

Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

Satz. $F \models G$ gdw. $(F \rightarrow G)$ ist gültig

Satz. F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

Satz. $F \models G$ gdw. $(F \rightarrow G)$ ist gültig

Beweis

- $F \models G$ gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$ -Str und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$: Falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.
- gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$ -Str und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}(\beta)(F) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G) = 1$
- gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$ -Str und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}(\beta)(F \rightarrow G) = 1$

Satz. F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

Satz. $F \models G$ gdw. $(F \rightarrow G)$ ist gültig

Beweis

$F \models G$ gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str}$ und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$: Falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.
gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str}$ und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}(\beta)(F) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G) = 1$
gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str}$ und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}(\beta)(F \rightarrow G) = 1$

Satz. F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Beweis

F und G sind äquivalent gdw. $F \models G$ und $F \models G$
gdw. $\models F \rightarrow G$ und $\models G \rightarrow F$
gdw. $\models F \leftrightarrow G$

Gültigkeit und Unerfüllbarkeit

Nachweis von Gültigkeit (und damit Folgerung oder Äquivalenz) durch Unerfüllbarkeitstest:

F gültig genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar

$N \models F$ genau dann, wenn $N \cup \neg F$ unerfüllbar

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$ ist das gleiche wie $\forall y \forall x$

$\exists x \exists y$ ist das gleiche wie $\exists y \exists x$

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$ ist das gleiche wie $\forall y \forall x$

$\exists x \exists y$ ist das gleiche wie $\exists y \exists x$

Informell: Für jede Formel F gilt: $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$; $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$.

Theorem

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ -Formeln F gilt:

(1) $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$

(2) $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Beispiel:

$\forall x \exists y \text{ Mutter}(y, x)$ Jeder hat eine Mutter (richtig)

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Beispiel:

$\forall x \exists y \text{ Mutter}(y, x)$ Jeder hat eine Mutter (richtig)

$\exists y \forall x \text{ Mutter}(y, x)$ Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist
(falsch)

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Beispiel:

$\forall x \exists y \text{ Mutter}(y, x)$ Jeder hat eine Mutter (richtig)

$\exists y \forall x \text{ Mutter}(y, x)$ Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist
(falsch)

Bemerkung: $\forall x \exists y F \equiv \exists y \forall x F$ gilt nicht immer.

Es gibt eine Formel F so dass $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ nicht logisch äquivalent.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ -Formeln F gilt:

$$\exists x \forall y F \models \forall y \exists x F$$

Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und eine Formel F mit:

$$\forall x \exists y F \not\models \exists y \forall x F$$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \dots$ ist das gleiche wie $\neg \exists x \neg \dots$

$\exists x \dots$ ist das gleiche wie $\neg \forall x \neg \dots$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \dots$ ist das gleiche wie $\neg \exists x \neg \dots$

$\exists x \dots$ ist das gleiche wie $\neg \forall x \neg \dots$

Beispiel:

$\forall x \text{ mag}(x, \text{eiscreme})$ ist das gleiche wie $\neg \exists x \neg \text{mag}(x, \text{eiscreme})$

$\exists x \text{ mag}(x, \text{broccoli})$ ist das gleiche wie $\neg \forall x \neg \text{mag}(x, \text{broccoli})$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \dots$ ist das gleiche wie $\neg \exists x \neg \dots$

$\exists x \dots$ ist das gleiche wie $\neg \forall x \neg \dots$

Beispiel:

$\forall x \text{ mag}(x, \text{eiscreme})$ ist das gleiche wie $\neg \exists x \neg \text{mag}(x, \text{eiscreme})$

$\exists x \text{ mag}(x, \text{broccoli})$ ist das gleiche wie $\neg \forall x \neg \text{mag}(x, \text{broccoli})$

Informell: Für jede Formel F gilt: $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$; $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ -Formeln F gilt:

(1) $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$

(2) $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$

Eigenschaften von Quantoren

\forall distributiert über \wedge

$\forall x(\dots \wedge \dots)$ ist das gleiche wie $(\forall x\dots) \wedge (\forall x\dots)$

Eigenschaften von Quantoren

\forall distributiert über \wedge

$\forall x(\dots \wedge \dots)$ ist das gleiche wie $(\forall x\dots) \wedge (\forall x\dots)$

Beispiel

$\forall x(\textit{studiert}(x) \wedge \textit{arbeitet}(x))$ ist das gleiche wie

$(\forall x \textit{studiert}(x)) \wedge (\forall x \textit{arbeitet}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

\forall distribuiert über \wedge

$\forall x(\dots \wedge \dots)$ ist das gleiche wie $(\forall x\dots) \wedge (\forall x\dots)$

Beispiel

$\forall x(\text{studiert}(x) \wedge \text{arbeitet}(x))$ ist das gleiche wie

$(\forall x \text{studiert}(x)) \wedge (\forall x \text{arbeitet}(x))$

Informell: Für alle Formeln F, G gilt: $\forall x(F \wedge G) \equiv \forall xF \wedge \forall xG$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ -Formeln F, G gilt:

$$\forall x(F \wedge G) \equiv \forall xF \wedge \forall xG$$

Eigenschaften von Quantoren

\exists distributiert über \vee

$\exists x(\dots \vee \dots)$ ist das gleiche wie $(\exists x\dots) \vee (\exists x\dots)$

Eigenschaften von Quantoren

\exists distributiert über \vee

$\exists x(\dots \vee \dots)$ ist das gleiche wie $(\exists x\dots) \vee (\exists x\dots)$

Beispiel

$\exists x(\textit{gerade}(x) \vee \textit{ungerade}(x))$ ist das gleiche wie

$(\exists x \textit{gerade}(x)) \vee (\exists x \textit{ungerade}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

\exists distribuiert über \vee

$\exists x(\dots \vee \dots)$ ist das gleiche wie $(\exists x\dots) \vee (\exists x\dots)$

Beispiel

$\exists x(\text{gerade}(x) \vee \text{ungerade}(x))$ ist das gleiche wie
 $(\exists x \text{gerade}(x)) \vee (\exists x \text{ungerade}(x))$

Informell: Für alle Formeln F, G gilt: $\exists x(F \vee G) \equiv \exists xF \vee \exists xG$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ -Formeln F, G gilt:

$$\exists x(F \vee G) \equiv (\exists x F) \vee (\exists x G)$$

Eigenschaften von Quantoren

\forall distributiert **NICHT** über \vee

$\forall x(\dots \vee \dots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x\dots) \vee (\forall x\dots)$

Eigenschaften von Quantoren

\forall distributiert NICHT über \vee

$\forall x(\dots \vee \dots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x\dots) \vee (\forall x\dots)$

Beispiel

$\forall x(\textit{gerade}(x) \vee \textit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie
 $(\forall x \textit{gerade}(x)) \vee (\forall x \textit{ungerade}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

\forall distributiert NICHT über \vee

$\forall x(\dots \vee \dots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x\dots) \vee (\forall x\dots)$

Beispiel

$\forall x(\text{gerade}(x) \vee \text{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie
 $(\forall x \text{gerade}(x)) \vee (\forall x \text{ungerade}(x))$

Theorem. Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und Σ -Formeln F, G mit:

$$\forall x(F \vee G) \not\equiv \forall xF \vee \forall xG$$

(1) $\forall xF \vee \forall xG \models \forall x(F \vee G)$

(2) $\forall x(F \vee G) \not\models \forall xF \vee \forall xG$

Eigenschaften von Quantoren

\exists distributiert **NICHT** über \wedge

$\exists x(\dots \wedge \dots)$ ist **NICHT** das gleiche wie $(\exists x\dots) \wedge (\exists x\dots)$

Eigenschaften von Quantoren

\exists distributiert **NICHT** über \wedge

$\exists x(\dots \wedge \dots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x\dots) \wedge (\exists x\dots)$

Beispiel

$\exists x(\textit{gerade}(x) \wedge \textit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie
 $(\exists x \textit{gerade}(x)) \wedge (\exists x \textit{ungerade}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

\exists distributiert NICHT über \wedge

$\exists x(\dots \wedge \dots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x\dots) \wedge (\exists x\dots)$

Beispiel

$\exists x(\text{gerade}(x) \wedge \text{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \text{gerade}(x)) \wedge (\exists x \text{ungerade}(x))$

Theorem. Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und Σ -Formeln F, G mit:

$$\exists x(F \wedge G) \not\equiv \exists xF \wedge \exists xG$$

(1) $\exists x(F \wedge G) \models \exists xF \wedge \exists xG$

(2) $\exists xF \wedge \exists xG \not\models \exists x(F \wedge G)$

Zusammenfassung

Wichtige Äquivalenzen

- $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
- $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$
- $\forall x (F \wedge G) \equiv (\forall x F) \wedge (\forall x G)$
- $\exists x (F \vee G) \equiv (\exists x F) \vee (\exists x G)$
- $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$ $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
- $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$ $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

Wichtige Äquivalenzen (Zusammenfassung)

- $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
- $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$
- $\forall x (F \wedge G) \equiv (\forall x F) \wedge (\forall x G)$
- $\exists x (F \vee G) \equiv (\exists x F) \vee (\exists x G)$
- $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$ $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
- $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$ $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

Falls x in der Formel H nicht vorkommt, dann:

- $(\forall x F(x)) \vee H \equiv \forall x (F(x) \vee H)$
- $(\forall x F(x)) \wedge H \equiv \forall x (F(x) \wedge H)$
- $(\exists x F(x)) \vee H \equiv \exists x (F(x) \vee H)$
- $(\exists x F(x)) \wedge H \equiv \exists x (F(x) \wedge H)$

Zusammenfassung

Aber Vorsicht

$$\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$$

- $\exists y \forall x F \models \forall x \exists y F$
- $\forall x \exists y F \not\models \exists y \forall x F$

$$\forall x (F \vee G) \not\equiv (\forall x F) \vee (\forall x G)$$

- $(\forall x F) \vee (\forall x G) \models \forall x (F \vee G)$
- $\forall x (F \vee G) \not\models \forall x F \vee \forall x G$

$$\exists x (F \wedge G) \not\equiv (\exists x F) \wedge (\exists x G)$$

- $\exists x (F \wedge G) \models (\exists x F) \wedge (\exists x G)$
- $(\exists x F) \wedge (\exists x G) \not\models \exists x (F \wedge G)$

Andere wichtige Äquivalenzen

$$(F \wedge F) \equiv F \quad (F \vee F) \equiv F \quad (\text{Idempotenz})$$

$$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F) \quad (F \vee G) \equiv (G \vee F) \quad (\text{Kommutativität})$$

$$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$$

$$(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H) \quad (\text{Assoziativität})$$

$$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$$

$$(F \vee (F \wedge G)) \equiv F \quad (\text{Absorption})$$

$$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$$

$$(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) \quad (\text{Distributivität})$$

$$(\neg\neg F) \equiv F \quad (\text{Doppelte Negation})$$

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G) \quad (\text{De Morgan's Regeln})$$

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F) \quad (\text{Kontraposition})$$

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G) \quad (\text{Elimination Implikation})$$

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \quad (\text{Elimination Äquivalenz})$$

Strukturelle Induction

- für Terme
- für Formeln in Prädikatenlogik

Strukturelle Induktion: Terme

Menge $T_\Sigma(X)$ der Σ -Terme:

Die kleinste Menge mit: • $X \subseteq T_\Sigma(X)$

Wenn • $f \in \Omega,$

• n ist die Stelligkeit von f

• $t_1, \dots, t_n \in T_\Sigma(X)$

dann $f(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma(X)$

Strukturelle Induktion: Terme

$$\Sigma = (\Omega, \Pi)$$

Sei $p(t)$ eine Eigenschaft der Σ -Terme in Prädikatenlogik

Behauptung: Für alle Terme t , $p(t)$ gilt

Beweis durch strukturelle Induktion:

Induktionsbasis: Zu zeigen:

$p(t)$ gilt für $t \in X$ und für alle Konstanten.

Sei t ein Term (nicht Variable oder Konstante).

Induktionsvoraussetzung:

$p(s)$ gilt für alle Teilterme s von t (mit $s \neq t$)

Induktionsschritt: Zu zeigen: $p(t)$ gilt:

Fallunterschied über alle $f \in \Omega$ mit $t = f(t_1, \dots, t_n)$.

Strukturelle Induktion: Formeln

Menge For_Σ der Formeln über Σ :

Die kleinste Menge, die

- Alle atomaren Formeln enthält,
- $\top \in \text{For}_\Sigma$, $\perp \in \text{For}_\Sigma$,
- Wenn $F, G \in \text{For}_\Sigma$, dann auch
 $\neg F, F \wedge G, F \vee G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G \in \text{For}_\Sigma$,
- Wenn $F \in \text{For}_\Sigma$ und $x \in X$, dann
 $\forall x F \in \text{For}_\Sigma, \exists x F \in \text{For}_\Sigma$

Strukturelle Induktion: Formeln

Sei $p(F)$ eine Eigenschaft der Σ -Formeln in Prädikatenlogik

Behauptung: Für alle Formeln F , $p(F)$ gilt

Beweis durch strukturelle Induktion:

Induktionsbasis: Zu zeigen:

$p(F)$ gilt für $F \in \{\top, \perp\}$ und für alle atomaren Formeln.

Sei F eine Formel (nicht atomar oder \top oder \perp).

Induktionsvoraussetzung:

$p(G)$ gilt für alle Teilformeln G von F (mit $G \neq F$)

Induktionsschritt: Zu zeigen: $p(F)$ gilt:

Fall 1 $F = \neg G$

Fall 2 $F = G_1 \vee G_2$

Fall 3 $F = G_1 \wedge G_2$

Fall 4 $F = G_1 \rightarrow G_2$

Fall 5 $F = G_1 \leftrightarrow G_2$

Fall 6 $F = \forall xG$

Fall 7 $F = \exists xG$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)

Für alle Σ -Strukturen \mathcal{A} , Wertebelegungen β , Σ -Formeln F , Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)

Für alle Σ -Strukturen \mathcal{A} , Wertebelegungen β , Σ -Formeln F , Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: Strukturelle Induktion

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)

Für alle Σ -Strukturen \mathcal{A} , Wertbelegungen β , Σ -Formeln F , Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: Strukturelle Induktion

Plan: Wir benutzen folgendes Lemma:

Lemma: Für alle Σ -Strukturen \mathcal{A} , Wertbelegungen β , Variable x und Terme t_i, t :

$$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$$