# Logik für Informatiker

## 2. Aussagenlogik

## Teil 1

16.04.2019

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

# Bis jetzt

- Grundlegende Beweisstrategien
- Induktion über die natürlichen Zahlen / Fehlerquellen
- Strukturelle Induktion

# Bis jetzt

- Grundlegende Beweisstrategien
- Induktion über die natürlichen Zahlen / Fehlerquellen
- Strukturelle Induktion

**Jetzt:** Aussagenlogik

- Beispiele

# Beispiel: Logisches Puzzle

Lediglich eine dieser drei Personen sagt die Wahrheit, die anderen beiden lügen. Kannst du anhand ihrer Aussagen herausfinden, wer die Wahrheit sagt?

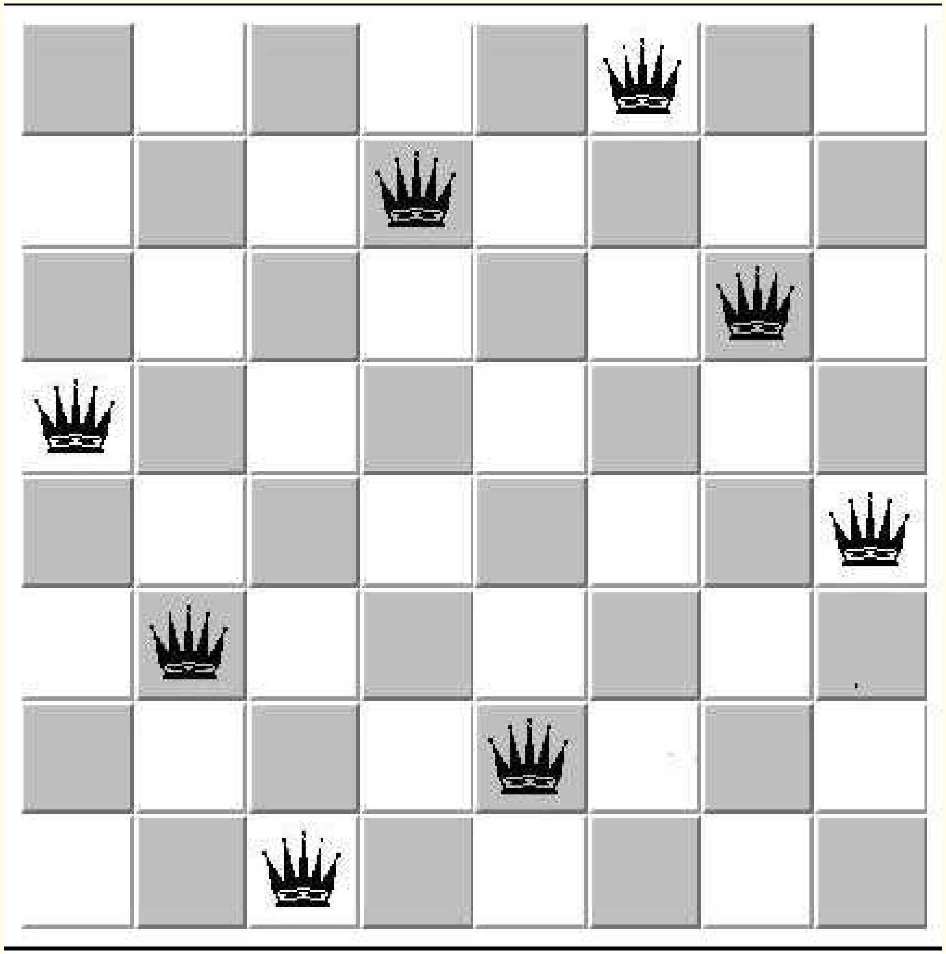
A: Ich lüge nicht.
B: A lügt.
C: B lügt.

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Man platziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Man platziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.



# Beispiel: Das 8-Damen Problem

## Beschreibung des Problems

Für jedes Feld des Schachbretts eine aussagenlogische Variable

$$D_{ij}$$

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

## Beschreibung des Problems

Für jedes Feld des Schachbretts eine aussagenlogische Variable

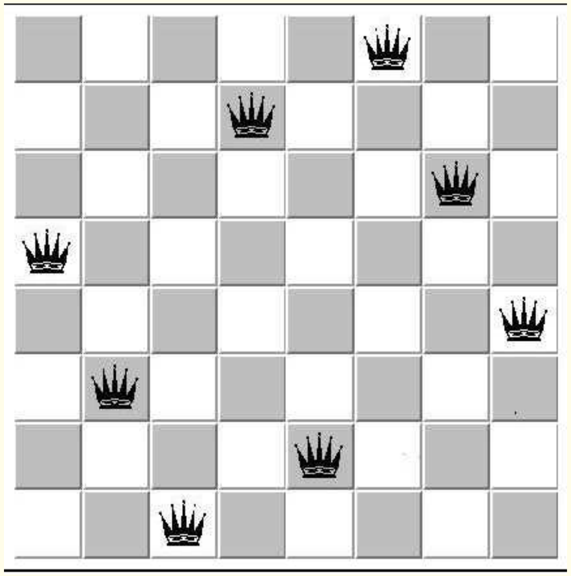
$$D_{ij}$$

Mit der Vorstellung, dass $D_{ij}$ den Wert wahr hat, wenn auf dem Feld $(i, j)$ eine Dame steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto$ $D_{57}$ wahr.



**Einschränkungen pro Feld: $F_{ij}$**

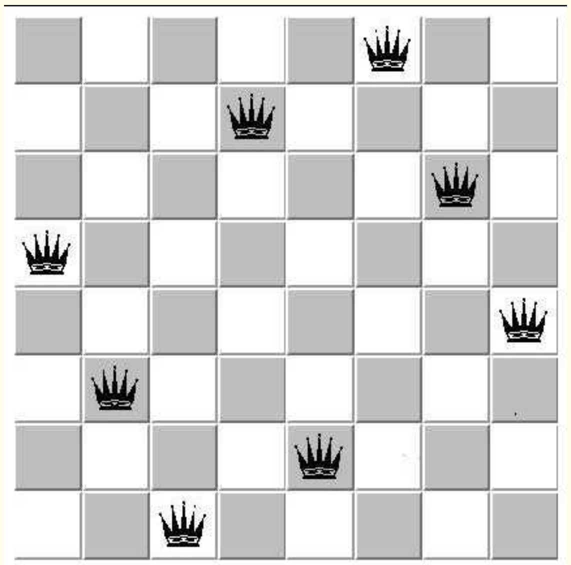
Falls auf dem Feld (5, 7) eine Dame steht:

- keine andere Dame auf Feld (5,1), (5,2), (5,3), (5,4),(5,5), (5,6), (5,8)
- keine andere Dame auf Feld (1,7), (2,7), (3,7), (4,7),(6,7), (7,7), (8,7)
- keine andere Dame auf Feld (6,8), (4,6), (3,5), (2,4),(1,3)
- keine andere Dame auf Feld (4,8), (6,6), (7,5), (8,4)

(ähniche Bedingungen für alle Felder $(i, j)$).

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.



**Einschränkungen pro Feld: $F_{ij}$**

Falls auf dem Feld (5, 7) eine Dame steht:

- keine andere Dame auf Feld (5,8), (5,6), (5,5), (5,4),(5,3), (5,2), (5,1)

$D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,}$

- keine andere Dame auf Feld (1,7), (2,7), (3,7), (4,7),(6,7), (7,7), (8,7)

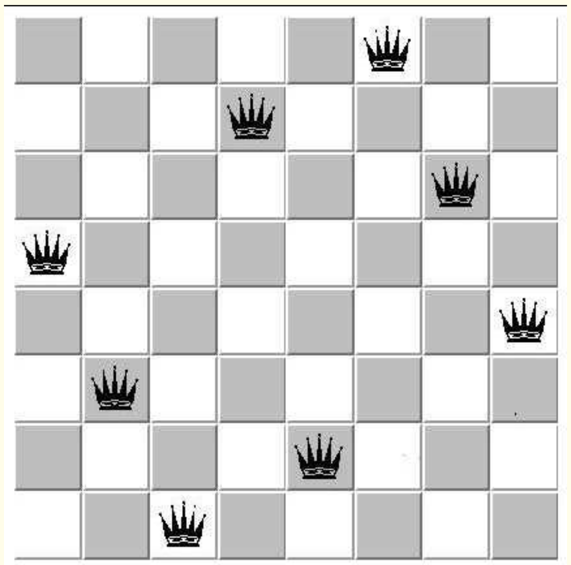
- keine andere Dame auf Feld (6,8), (4,6), (3,5), (2,4),(1,3)

- keine andere Dame auf Feld (4,8), (6,6), (7,5), (8,4)

(ähniche Bedingungen für alle Felder $(i, j)$).

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.



**Einschränkungen pro Feld: $F_{ij}$**

Falls auf dem Feld (5, 7) eine Dame steht:

- keine andere Dame auf Feld (5,8), (5,6), (5,5), (5,4),(5,3), (5,2), (5,1)

$D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$

- keine andere Dame auf Feld (1,7), (2,7), (3,7), (4,7),(6,7), (7,7), (8,7)

$D_{57} \rightarrow \neg D_{17} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{87}$

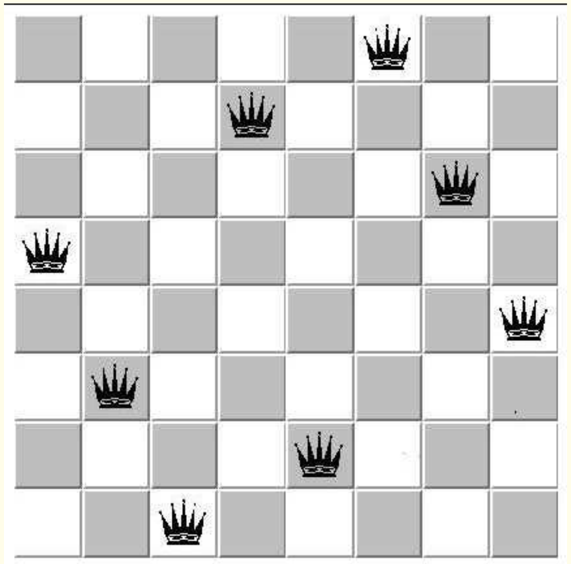
- keine andere Dame auf Feld (6,8), (4,6), (3,5), (2,4),(1,3)

- keine andere Dame auf Feld (4,8), (6,6), (7,5), (8,4)

(ähniche Bedingungen für alle Felder $(i, j)$).

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.



**Einschränkungen pro Feld: $F_{ij}$**

Falls auf dem Feld (5, 7) eine Dame steht:

- keine andere Dame auf Feld
  (5,8), (5,6), (5,5), (5,4),(5,3), (5,2), (5,1)

$D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$

- keine andere Dame auf Feld
  (1,7), (2,7), (3,7), (4,7),(6,7), (7,7), (8,7)

$D_{57} \rightarrow \neg D_{17} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{87}$

- keine andere Dame auf Feld (6,8), (4,6), (3,5), (2,4),(1,3)

$D_{57} \rightarrow \neg D_{68} \wedge \neg D_{4,6} \wedge \neg D_{3,5} \wedge \neg D_{2,4} \wedge \neg D_{1,3}$

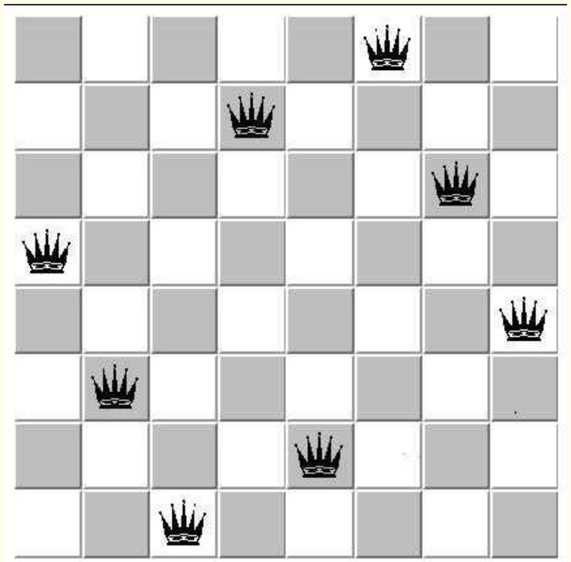
- keine andere Dame auf Feld (4,8), (6,6), (7,5), (8,4)

$D_{57} \rightarrow \neg D_{48} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,5} \wedge \neg D_{8,4}$

(ähniche Bedingungen für alle Felder $(i, j)$).

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto$ $D_{57}$ wahr.



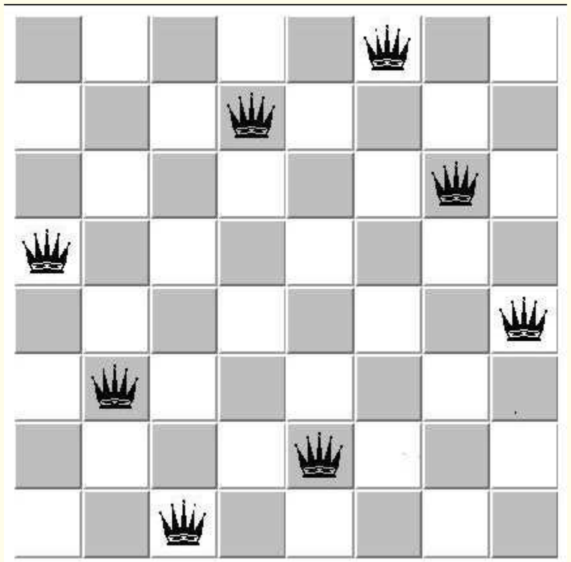
**Einschränkungen pro Feld: $F_{ij}$**

$$\underbrace{\begin{array}{l}
D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,} \\
D_{57} \rightarrow \neg D_{17} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{87} \\
D_{57} \rightarrow \neg D_{68} \wedge \neg D_{4,6} \wedge \neg D_{3,5} \wedge \neg D_{2,4} \wedge \neg D_{1,3} \\
D_{57} \rightarrow \neg D_{48} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,5} \wedge \neg D_{8,4}
\end{array}}_{F_{57}}$$

(ähniche Bedingungen $F_{ij}$ für alle Felder $(i, j)$).

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto$ $D_{57}$ wahr.



**Einschränkungen pro Feld: $F_{ij}$**

$$\underbrace{\begin{array}{l}
D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,} \\
D_{57} \rightarrow \neg D_{17} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{87} \\
D_{57} \rightarrow \neg D_{68} \wedge \neg D_{4,6} \wedge \neg D_{3,5} \wedge \neg D_{2,4} \wedge \neg D_{1,3} \\
D_{57} \rightarrow \neg D_{48} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,5} \wedge \neg D_{8,4}
\end{array}}_{F_{57}}$$

**Globale Einschränkungen**

Für jedes $k$ mit $1 \leq k \leq 8$:

$R_k := D_{1,k} \vee D_{2,k} \vee D_{3,k} \vee D_{4,k} \vee D_{5,k} \vee D_{6,k} \vee D_{7,k} \vee D_{8,k}$

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

**Struktur:** Wahrheitswerte für die atomaren Aussagen $D_{ij}$

**Modell für $F_{ij}$ ($R_k$):** Wahrheitswerte für die atomaren Aussagen $D_{ij}$ so dass $F_{ij}$ wahr (bzw. $R_k$ wahr).

**Lösung des 8-Damen Problems:**

Eine aussagenlogische Struktur beschreibt eine Lösung des 8-Damen-Problems genau dann, wenn sie ein Modell der Formeln

- $F_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq 8$
- $R_k$ für alle $1 \leq k \leq 8$

ist.

# Formale Logik

- Syntax

  welche Formeln?

- Semantik

  Modelle (Strukturen)

  Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?

- Deduktionsmechanismus

  Ableitung neuer wahrer Formeln

# Aussagenlogik

Die Welt besteht aus Fakten die wahr oder falsch sein können.

# Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

$\top$ Symbol für die Formel "wahr" (Formel, die immer wahr ist)

$\bot$ Symbol für die Formel "falsch" (Formel, die immer falsch ist)

# Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

$\top$ Symbol für die Formel "wahr"

$\perp$ Symbol für die Formel "falsch"

$\neg$ Negationssymbol ("nicht")

# Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

$\top$ Symbol für die Formel "wahr"

$\bot$ Symbol für die Formel "falsch"

$\neg$ Negationssymbol ("nicht")

$\wedge$ Konjunktionssymbol ("und")

$\vee$ Disjunktionssymbol ("oder")

$\rightarrow$ Implikationssymbol ("wenn . . . dann")

$\leftrightarrow$ Symbol für Äquivalenz ("genau dann, wenn")

# Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

$\top$ Symbol für die Formel "wahr"

$\bot$ Symbol für die Formel "falsch"

$\neg$ Negationssymbol ("nicht")

$\wedge$ Konjunktionssymbol ("und")

$\vee$ Disjunktionssymbol ("oder")

$\rightarrow$ Implikationssymbol ("wenn ... dann")

$\leftrightarrow$ Symbol für Äquivalenz ("genau dann, wenn")

( ) die beiden Klammern

# Vokabular der Aussagenlogik

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Pi = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Pi = \{P_0, P_1, \ldots\}$$

# Vokabular der Aussagenlogik

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Pi = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Pi = \{P_0, P_1, \ldots\}$$

**Bezeichnungen für Symbole in $\Pi$**

- atomare Aussagen
- Atome
- Aussagenvariablen

# Formeln der Aussagenlogik

**Definition:** Menge $For_\Pi$ der Formeln über $\Pi$:

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in For_\Pi$ und $\bot \in For_\Pi$

# Formeln der Aussagenlogik

**Definition:** Menge $\mathrm{For}_\Pi$ der Formeln über $\Pi$:

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \mathrm{For}_\Pi$ und $\bot \in \mathrm{For}_\Pi$
- $\Pi \subseteq \mathrm{For}_\Pi$

# Formeln der Aussagenlogik

**Definition:** Menge $\mathrm{For}_\Pi$ der Formeln über $\Pi$:

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \mathrm{For}_\Pi$ und $\bot \in \mathrm{For}_\Pi$
- $\Pi \subseteq \mathrm{For}_\Pi$
- Wenn $F, G \in \mathrm{For}_\Pi$, dann auch

$$\neg F, (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$$

  Elemente von $\mathrm{For}_\Pi$.

# Aussagenformeln

$\mathrm{For}_\Pi$ Menge der Formeln über $\Pi$:

$$
\begin{array}{rcll}
F, G, H & ::= & \bot & \text{(Falsum)} \\
& \mid & \top & \text{(Verum)} \\
& \mid & P, \quad P \in \Pi & \text{(atomare Formel)} \\
& \mid & \neg F & \text{(Negation)} \\
& \mid & (F \wedge G) & \text{(Konjunktion)} \\
& \mid & (F \vee G) & \text{(Disjunktion)} \\
& \mid & (F \rightarrow G) & \text{(Implikation)} \\
& \mid & (F \leftrightarrow G) & \text{(Äquivalenz)}
\end{array}
$$

# Konventionen zur Notation

- Klammereinsparungen werden nach folgenden Regeln vorgenommen:
  - $\neg \quad >_p \quad \wedge \quad >_p \quad \vee \quad >_p \quad \rightarrow \quad >_p \quad \leftrightarrow$ (Präzedenzen),
  - $\vee$ und $\wedge$ sind assoziativ und kommutativ,

# Konventionen zur Notation

- Klammereinsparungen werden nach folgenden Regeln vorgenommen:
  - $\neg \quad >_p \quad \wedge \quad >_p \quad \vee \quad >_p \quad \rightarrow \quad >_p \quad \leftrightarrow$ (Präzedenzen),
  - $\vee$ und $\wedge$ sind assoziativ und kommutativ,

**Beispiele:** $\Pi = \{P, Q, R\}$

$\bot,\ P,\ \neg Q,\ P \wedge \neg Q,\ (P \vee (\neg R \wedge \top))$ sind Formeln

Wir schreiben $P \wedge Q \wedge R$ statt $(P \wedge Q) \wedge R$.

# Beispiel: 8-Damenproblem

Aussagenlogische Variablen

$D_{i,j}$ bedeutet: Auf dem Feld $(i, j)$ steht eine Dame.

# Beispiel: 8-Damenproblem

Aussagenlogische Variablen

$D_{i,j}$ bedeutet: Auf dem Feld $(i, j)$ steht eine Dame.

Formeln

“Wenn auf dem Feld $(5, 7)$ eine Dame steht, kann keine Dame auf Feld (5,8), (5,6), (5,5), (5,4),(5,3), (5,2), (5,1) stehen”:

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$$

# Syntax: Beispiel

"Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?",
wurde ein 100 Jähriger gefragt.

"Ich halte mich streng an die Diätregeln:

- Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke,
  dann habe ich immer Fisch.
- Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe,
  verzichte ich auf Eiscreme.
- Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide,
  dann rühre ich Fisch nicht an."

# Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

- $\neg B \rightarrow F$

# Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

- $\neg B \rightarrow F$

Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme.

- $F \wedge B \rightarrow \neg E$

# Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

- $\neg B \rightarrow F$

Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme.

- $F \wedge B \rightarrow \neg E$

Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.

- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

# Beispiel 1

- $\neg B \rightarrow F$
- $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

# Beispiel 1

- $\neg B \rightarrow F$
- $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.:

- kein Bier, Fisch und Eiscreme
  erfüllt 3. Diätregel nicht!
- Bier, Fisch, keine Eiscreme
  erfüllt alle Diätregeln

# Beispiel 1

- $\neg B \rightarrow F$
- $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.: **Formalisierung:**

- kein Bier, Fisch und Eiscreme — $B \mapsto$ falsch, $F \mapsto$ wahr, $E \mapsto$ wahr
  erfüllt 3. Diätregel nicht!
- Bier, Fisch, keine Eiscreme — $B \mapsto$ wahr, $F \mapsto$ wahr, $E \mapsto$ falsch
  erfüllt alle Diätregeln

# Beispiel 1

- $\neg B \rightarrow F$
- $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.: **Formalisierung:**

0:falsch, 1:wahr $\mathcal{A} : \{B, F, E\} \rightarrow \{0, 1\}$

- kein Bier, Fisch und Eiscreme $\mathcal{A}(B) = 0, \mathcal{A}(F) = 1, \mathcal{A}(E) = 1$
  erfüllt 3. Diätregel nicht!
- Bier, Fisch, keine Eiscreme $\mathcal{A}(B) = 1, \mathcal{A}(F) = 1, \mathcal{A}(E) = 0$
  erfüllt alle Diätregeln

# Übersicht

## Aussagenlogik

- Syntax: welche Formeln?
- Semantik: Modelle (Strukturen)

  Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?
- Deduktionsmechanismus: Ableitung neuer wahrer Formeln

# Semantik der Aussagenlogik

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) zur Verfügung stehen.

1 Symbol für den Wahrheitswert "wahr"

0 Symbol für den Wahrheitswert "falsch"

Eine Valuation (Wertebelegung, Interpretation, Struktur, Modell) ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$$

# Semantik der Aussagenlogik

$\Pi$ eine aussagenlogische Signatur

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Eine Valuation (Wertebelegung) ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$$

Wir werden Wertebelegungen auch Aussagenlogische Strukturen, Aussagenlogische Modelle oder Interpretationen nennen.

# Semantik der Aussagenlogik

$\Pi$ eine aussagenlogische Signatur

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Eine Wertebelegung ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$$

**Beispiel:**

| A | B | C |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |

(Bei drei Symbolen gibt es 8 mögliche Modelle)