Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 3

25.04.2019

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- Syntax (Formeln)

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

$\top$ Symbol für die Formel “wahr”

$\bot$ Symbol für die Formel “falsch”

$\neg$ Negationssymbol (“nicht”)

$\wedge$ Konjunktionssymbol (“und”)

$\vee$ Disjunktionssymbol (“oder”)

$\rightarrow$ Implikationssymbol (“wenn . . . dann”)

$\leftrightarrow$ Symbol für Äquivalenz (“genau dann, wenn”)

( ) die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Pi = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Pi = \{P_0, P_1, \ldots\}$$

Bezeichnungen für Symbole in Π

- atomare Aussagen
- Atome
- Aussagenvariablen

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge For_Π der Formeln über Π:

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \mathrm{For}_\Pi$ und $\bot \in \mathrm{For}_\Pi$
- $\Pi \subseteq \mathrm{For}_\Pi$
- Wenn $F, G \in \mathrm{For}_\Pi$, dann auch

  $$\neg F, (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$$

  Elemente von For_Π.

Bis jetzt

- Syntax (Formeln)
- Semantik

  Wertebelegungen (Valuationen, Modelle)

  Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

  Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen

  Modell einer Formel(menge)

  Gültigkeit und Erfüllbarkeit

  Tautologien und Kontradiktionen

  Folgerung und Äquivalenz

  Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Allgemeingültigkeit/Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $F \models G$ gdw. $\models F \rightarrow G$.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Theorem. $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Theorem. $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Nota bene: falls N unerfüllbar, so $N \models G$ für jede Formel G
... auch für $\perp$.

Notation: $N \models \perp$ für N unerfüllbar.

Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Erfüllbarkeitstest:

Jede Formel F enthält endlich viele Aussagenvariablen.
$\mathcal{A}(F)$ ist nur von den Werten dieser Aussagenvariablen abhängig.

F enthält n Aussagenvariablen:

$\Rightarrow 2^n$ Wertbelegungen notwendig um zu überprüfen, ob F erfüllbar ist oder nicht.

$\Rightarrow$ Wahrheitstafel

$\Rightarrow$ Das Erfüllbarkeitsproblem ist entscheidbar

Es existieren viel bessere Methoden als Wahrheitstafeltests um die Erfüllbarkeit einer Formel zu überprüfen.

Ein zweiter Kalkül

Ein zweiter Kalkül: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel

Äquivalenz

Zwei Formeln F und G sind logisch äquivalent (Notation: $F \equiv G$) wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind

Beispiel: $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (Kontraposition)

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$$(F \wedge F) \equiv F$$

$$(F \vee F) \equiv F \qquad \text{(Idempotenz)}$$

$$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$$

$$(F \vee G) \equiv (G \vee F) \qquad \text{(Kommutativität)}$$

$$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$$

$$(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H) \qquad \text{(Assoziativität)}$$

$$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$$

$$(F \vee (F \wedge G)) \equiv F \qquad \text{(Absorption)}$$

$$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$$

$$(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) \qquad \text{(Distributivität)}$$

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$$(\neg\neg F) \equiv F \qquad \text{(Doppelte Negation)}$$

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G) \qquad \text{(De Morgan's Regeln)}$$

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F) \qquad \text{(Kontraposition)}$$

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G) \qquad \text{(Elimination Implikation)}$$

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \qquad \text{(Elimination Äquivalenz)}$$

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$(F \wedge G) \equiv F$, falls G Tautologie

$(F \vee G) \equiv \top$, falls G Tautologie (Tautologieregeln)

$(F \wedge G) \equiv \bot$, falls G unerfüllbar

$(F \vee G) \equiv F$, falls G unerfüllbar (Tautologieregeln)

Wichtige Äquivalenzen mit $\top/\bot$

$(A \wedge \neg A) \equiv \bot$

$(A \vee \neg A) \equiv \top$ (Tertium non datur)

$(A \wedge \top) \equiv A$

$(A \wedge \bot) \equiv \bot$

Wichtige Äquivalenzen (Zusammengefasst)

$(F \wedge F) \equiv F$	$(F \vee F) \equiv F$	(Idempotenz)
$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$	$(F \vee G) \equiv (G \vee F)$	(Kommutativität)
$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$ $(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H)$		(Assoziativität)
$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$ $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$		(Absorption)
$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$		(Distributivität)
$(\neg\neg F) \equiv F$		(Doppelte Negation)
$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$		(De Morgan's Regeln)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$		(Kontraposition)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$		(Elimination Implikation)
$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$		(Elimination Äquivalenz)

Terminologie

Eine Formel F, die als Teil einer Formel G auftritt,
heißt Teilformel von G.

- F ist eine Teilformel von F
- $\left.\begin{array}{l} F = \neg G \text{ und} \\ H \text{ Teilformel von } G \end{array}\right\} \rightarrow \quad H \text{ Teilformel von } F$
- $\left.\begin{array}{l} F = F_1 \ \rho \ F_2 \\ (\text{wo } \rho \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}) \\ H \text{ Teilformel von } F_1 \text{ oder } F_2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad H \text{ Teilformel von } F$

Substitutionstheorem

Theorem.
Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F.

Dann ist H äquivalent zu H', wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird.

Beispiel:

$A \vee B \equiv B \vee A$

impliziert

$(C \wedge (A \vee B)) \equiv (C \wedge (B \vee A))$

Strukturelle Induktion

Menge aller aussagenlogischen Formeln For_Π , wobei $\Pi = \{P_0, P_1, \dots\}$

Basismenge: $\top, \bot; P_0, P_1, P_2, \dots$ sind aussagenlogische Formeln (atomare Form

Erzeugungsregel: Wenn F_1, F_2 aussagenlogische Formeln sind, dann sind auch

$\neg F_1, F_1 \wedge F_2, F_1 \vee F_2, F_1 \rightarrow F_2, F_1 \leftrightarrow F_2$ aussagenlogische Formeln

For_Π kleinste Menge, die:

- $\top, \bot$ und Π enthält
- zusammen mit F auch $\neg F$ enthält
- zusammen mit F_1, F_2 auch $F_1 \mathrm{op} F_2$ enthält ($\mathrm{op} \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)

Gelten die beiden Aussagen:

- $p(A)$ für alle atomaren Formeln $A \in \{\top, \bot\} \cup \Pi$
- $\forall F \in \mathrm{For}_\Pi$: (Falls ($F = \neg F_1$ und $p(F_1)$) dann $p(F)$);

  (Falls ($F = F_1 \mathrm{op} F_2$ und $p(F_1)$ und $p(F_2)$) dann $p(F)$)

dann gilt auch $\forall F \in \mathrm{For}_\Pi : p(F)$.

Substitutionstheorem

Theorem.
Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F.

Dann ist H äquivalent zu H', wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird. $p(H)$

Beweis: Strukturelle Induktion.

Induktionsbasis: Beweisen, dass $p(H)$ für alle Formeln H in $\{\bot, \top\} \cup \Pi$ gilt.

Beweis: Falls $H \in \{\bot, \top\} \cup \Pi$ und F Teilformel von H, so muss $F = H$ sein. Dann ist die Formel H', die aus H hervorgeht, indem F ($=$ die ganze Formel H) durch G ersetzt wird, gleich G.

Aber dann: $H = F \equiv G = H'$.

Substitutionstheorem

Beweis: (Fortsetzung)
Sei H eine Formel, $H \not\in \{\bot, \top\} \cup \Pi$. Sei F eine Teilformel von H.

Fall 1: $F = H$. Dann $H' = G$ (wie vorher), so $H = F \equiv G = H'$.

Fall 2: $F \neq H$.

Induktionsvoraussetzung: Annahme: $p(H')$ gilt für alle dir. Teilformeln H' von H.

Induktionsschritt: Beweis, dass $p(H)$ gilt (durch Fallunterscheidung):

Fall 2.1: $H = \neg H_1$. Da $F \neq H$, ist F eine Teilformel von H_1.

Induktionvoraussetzung: $p(H_1)$ gilt, d.h. $H_1 \equiv H_1'$, wobei H_1' aus H_1 hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H_1 durch G ersetzt wird.

Da $H = \neg H_1$, ist $H' = \neg H_1'$.

Dann für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$: $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(\neg H_1) = \neg \mathcal{A}(H_1) \overset{I.V.}{=} \neg \mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(H')$

Somit ist bewiesen, dass $H \equiv H'$.

Substitutionstheorem

Beweis: (Fortsetzung)
Induktionsschritt: Beweis, dass $p(H)$ gilt (durch Fallunterscheidung):

Fall 2.2: $H = H_1$ op H_2**.** Da $F \neq H$, ist F Teilformel von H_1 oder von H_2.

Fall 2.2.1 F ist eine Teilformel von H_1.
Induktionvoraussetzung: $p(H_1)$ gilt, d.h. $H_1 \equiv H_1'$, wobei H_1' aus H_1 hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H_1 durch G ersetzt wird.

Da $H = H_1$ op H_2, und F in H_1 vorkommt, so $H' = H_1'$ op H_2.
Dann für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$: $\mathcal{A}(H)$=$\mathcal{A}(H_1$ op $H_2)$=$\mathcal{A}(H_1)$ op $\mathcal{A}(H_2) \overset{I.V.}{=}$ $\mathcal{A}(H_1')$ op $\mathcal{A}(H_2)$=$\mathcal{A}(H_1'$ op $H_2) = \mathcal{A}(H')$.

Somit ist bewiesen, dass $H \equiv H'$.

Fall 2.2.2 F ist eine Teilformel von H_2. Analog.

Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung

Definition: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel
- Anwendung des Substitutionstheorems

Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung

Definition: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel
- Anwendung des Substitutionstheorems

Theorem

Äquivalenzumformung bildet mit den aufgelisteten wichtigen Äquivalenzen einen vollständigen Kalkül:

Wenn F und G logisch äquivalent sind, kann F in G umgeformt werden.

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

Beispiel

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$ (Elimination Implikation)

Beispiel

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$ (Elimination Implikation)

$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$ (Elimination Implikation)

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$ (Elimination Implikation)

$\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$ (Elimination Implikation)

$\equiv (\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$ (De Morgan's Regel, $\lor$)

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$	(De Morgan's Regel, $\lor$)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\lor$)

Beispiel

$(P \to Q) \wedge \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \to (\neg P \vee R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$	(De Morgan's Regel, $\vee$)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge \quad ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\vee$)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R))$	(Doppelte Negation)

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$	(De Morgan's Regel, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R))$	(Doppelte Negation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land P \land \neg R))$	(Distributivität)

Beispiel

$$
\begin{aligned}
&(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R)) && \\
\equiv&(\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R)) && \text{(Elimination Implikation)}\\
\equiv&(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R)) && \text{(Elimination Implikation)}\\
\equiv&(\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R)) && \text{(De Morgan's Regel,}\lor\text{)}\\
\equiv&(\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R)) && \text{(Doppelte Negation, De Morgan, }\lor\text{)}\\
\equiv&(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R)) && \text{(Doppelte Negation)}\\
\equiv&(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land P \land \neg R)) && \text{(Distributivität)}\\
\equiv&(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land \neg R \land P)) && \text{(Kommutativität)}
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$$

$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$	(De Morgan's Regel, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R))$	(Doppelte Negation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land P \land \neg R))$	(Distributivität)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land \neg R \land P))$	(Kommutativität)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor \bot)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land (\neg Q \land P \land \neg R)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$	(De Morgan's Regel, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R))$	(Doppelte Negation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land P \land \neg R))$	(Distributivität)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land \neg R \land P))$	(Kommutativität)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor \bot)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land (\neg Q \land P \land \neg R)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)
$\equiv(\neg P \land \neg Q \land P \land \neg R) \lor (Q \land \neg Q \land P \land \neg R)$	(Distributivität)
$\equiv(\neg P \land P \land \neg Q \land \neg R) \lor (Q \land \neg Q \land P \land \neg R)$	(Kommutativität)

Beispiel

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$	(De Morgan's Regel, $\vee$)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge \quad ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\vee$)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R))$	(Doppelte Negation)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge P \wedge \neg R))$	(Distributivität)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg R \wedge P))$	(Kommutativität)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee \bot)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \wedge P \wedge \neg R)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)
$\equiv(\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R)$	(Distributivität)
$\equiv(\neg P \wedge P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R)$	(Kommutativität)
$\equiv((\neg P \wedge P) \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee ((Q \wedge \neg Q) \wedge P \wedge \neg R)$	(Assoziativität)

Beispiel

$$
\begin{array}{lll}
& (P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R)) & \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R)) & \text{(Elimination Implikation)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R)) & \text{(Elimination Implikation)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R)) & \text{(De Morgan's Regel,} \lor\text{)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R)) & \text{(Doppelte Negation, De Morgan, } \lor\text{)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R)) & \text{(Doppelte Negation)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land P \land \neg R)) & \text{(Distributivität)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land \neg R \land P)) & \text{(Kommutativität)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor \bot) & \text{(Äquivalenzen mit } \bot\text{)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land (\neg Q \land P \land \neg R) & \text{(Äquivalenzen mit } \bot\text{)} \\
\equiv & (\neg P \land \neg Q \land P \land \neg R) \lor (Q \land \neg Q \land P \land \neg R) & \text{(Distributivität)} \\
\equiv & (\neg P \land P \land \neg Q \land \neg R) \lor (Q \land \neg Q \land P \land \neg R) & \text{(Kommutativität)} \\
\equiv & ((\neg P \land P) \land \neg Q \land \neg R) \lor ((Q \land \neg Q) \land P \land \neg R) & \text{(Assoziativität)} \\
\equiv & \bot \lor \bot \equiv \bot & \text{(Äquivalenzen mit } \bot\text{)}
\end{array}
$$

Bis jetzt

Kalküle

Wahrheitstafelmethode

Äquivalenzumformung

Bis jetzt

Kalküle

Wahrheitstafelmethode

Äquivalenzumformung

Nicht besonders effizient

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

Dazu brauchen wir “Normalformen”

Normalformen

Definition:

- Atom: aussagenlogische Variable
- Literal: Atom, oder

  Negation eines Atoms

Beispiel. Sei $\Pi = \{P, Q, R\}$.

Atome: $P, \quad Q, \quad R$

Literale: $P, \quad \neg P, \quad Q, \quad \neg Q, \quad R, \quad \neg R$

Normalformen

Definition:

- Atom: aussagenlogische Variable
- Literal: Atom, oder

  Negation eines Atoms

Definition:

Klausel: Eine Disjunktion von Literalen

- mehrstellige Disjunktionen $(P \vee \neg Q \vee R)$, $(P \vee P \vee \neg Q)$
- einstellige Disjunktionen P
- die nullstellige Disjunktion (leere Klausel) $\perp$

Normalformen

Definition:

Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln

Normalformen

Definition:

Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Normalformen

Definition:

Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Beispiele:

$(P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg R \vee \neg S)$

$P \vee Q$

$P \wedge (Q \vee R)$

$P \wedge Q$

$P \wedge P$

$\top$

Normalformen

Definition:

Disjunktive Normalform (DNF): Eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen.

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Beispiele:

$(P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg R \land \neg S)$

$P \land Q$

$P \lor (Q \land R)$

$P \lor Q$

$P \lor P$

$\bot$

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

Beispiel

$F: \quad (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

Beispiel: DNF

$F: \quad (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

Beispiel: DNF

$F: \quad (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

DNF: $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

Beispiel: KNF

$F: \quad (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F	$\neg F$
0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0

DNF für $\neg F$: $(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$

KNF für F: $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

Normalformen

DNF für F:

$$\boxed{\bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \cdots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})}$$

wobei:

$P^0 = \neg P$

$P^1 = P$

Normalformen

DNF für F:

$$\boxed{\bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \cdots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})}$$

wobei:

$P^0 = \neg P$

$P^1 = P$

Theorem

Für alle Interpretationen $\mathcal{A}' : \{P_1, \ldots, P_n\} \to \{0, 1\}$:

$$\mathcal{A}'(F) = 1 \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{A}'\Big(\bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \cdots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})\Big) = 1.$$

Normalformen

DNF für F:

$$\boxed{\bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\dots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \cdots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})}$$

wobei:

$P^0 = \neg P$

$P^1 = P$

KNF für F: $\neg F'$,

wobei F' die DNF von $\neg F$ ist.

Normalformen

DNF für F:

$$\boxed{\bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \cdots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})}$$

wobei:

$P^0 = \neg P$

$P^1 = P$

KNF für F: $\neg F'$,

wobei F' die DNF von $\neg F$ ist.

KNF für F:

$$\boxed{\bigwedge_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=0}} (P_1^{1-\mathcal{A}(P_1)} \vee \cdots \vee P_n^{1-\mathcal{A}(P_n)})}$$

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

  nächste Vorlesung

Umformung in KNF

Vier Schritte:

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$

   Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$

   $\mapsto$ Negationsnormalform (NNF)

Eine logische Formel ist in Negationsnormalform (NNF), falls die Negationsoperatoren in ihr nur direkt über atomaren Aussagen vorkommen.

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$

   Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$ (NNF)

4. "Nach innen schieben" von $\vee$

   Verwende Distributivität von $\vee$ über $\wedge$

Umformung in DNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$

   Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$ (NNF)

4. "Nach innen schieben" von $\wedge$

   Verwende Distributivität von $\wedge$ über $\vee$

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$

   Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$ (NNF)

4. "Nach innen schieben" von $\vee$

   Verwende Distributivität von $\vee$ über $\wedge$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von $\rightarrow$

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von $\rightarrow$

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg (Q \vee R) \vee P)$$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$ (NNF)

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von $\rightarrow$

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P)$$

3. “Nach innen schieben” von $\neg$ (NNF)

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)$$

4. “Nach innen schieben” von $\vee$

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (\neg R \vee P)$$

Umformung in DNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$

   Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$ (NNF)

4. "Nach innen schieben" von $\wedge$

   Verwende Distributivität von $\wedge$ über $\vee$

Umformung in DNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Negationsnormalform (NNF) (s. Seite 69):

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)$$

2. "Nach innen schieben" von $\wedge$

$$
\begin{aligned}
& (\neg P \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \vee (Q \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \vee (R \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \\
\equiv \quad & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge P) \quad \vee \quad (Q \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge P) \quad \vee \\
& (R \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge P) \\
\equiv \quad & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee \underbrace{(\neg P \wedge P)}_{\equiv \perp} \quad \vee \quad (\underbrace{(Q \wedge \neg Q)}_{\equiv \perp} \wedge \neg R) \vee (Q \wedge P) \quad \vee \\
& (\underbrace{(R \wedge \neg R)}_{\equiv \perp} \wedge \neg Q) \vee (R \wedge P) \\
\equiv \quad & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge P) \vee (R \wedge P)
\end{aligned}
$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge_{f:\{1,\ldots,n\} \to \{1,2\}} (P_{1,f(1)} \vee \cdots \vee P_{n,f(n)})$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$\begin{array}{rcll}
n = 1 : A_1 & = & P_{11} \wedge P_{12} & \text{Länge: } 2 = 2^1 \\
n = 2 : A_2 & = & (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22}) & \\
& \equiv & ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22}) & \\
& \equiv & (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}) & \text{Länge: } 2 \cdot 2 = 2^2
\end{array}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \land P_{12}) \lor \cdots \lor (P_{n1} \land P_{n2})$$

$$\begin{aligned}
n = 1 : A_1 &= P_{11} \land P_{12} && \text{Länge: } 2 = 2^1 \\
n = 2 : A_2 &= (P_{11} \land P_{12}) \lor (P_{21} \land P_{22}) \\
&\equiv ((P_{11} \land P_{12}) \lor P_{21}) \land ((P_{11} \land P_{12}) \lor P_{22}) \\
&\equiv (P_{11} \lor P_{21}) \land (P_{12} \lor P_{21}) \land (P_{11} \lor P_{22}) \land (P_{12} \lor P_{22}) && \text{Länge: } 2 \cdot 2 = 2^2 \\
n = 3 : A_3 &= \underbrace{(P_{11} \land P_{12}) \lor (P_{21} \land P_{22})}_{A_2} \lor (P_{31} \land P_{32}) \\
&\equiv \underbrace{((P_{11} \lor P_{21}) \land (P_{12} \lor P_{21}) \land (P_{11} \lor P_{22}) \land (P_{12} \lor P_{22}))}_{KNF(A_2)} \lor (P_{31} \land P_{32})
\end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$\begin{aligned}
n = 1 : A_1 &= P_{11} \wedge P_{12} && \text{Länge: } 2 = 2^1 \\
n = 2 : A_2 &= (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22}) \\
&\equiv ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22}) \\
&\equiv (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}) && \text{Länge: } 2 \cdot 2 = 2^2 \\
n = 3 : A_3 &= \underbrace{(P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})}_{A_2} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) \\
&\equiv \underbrace{((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}))}_{KNF(A_2)} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) \\
&\equiv (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{31}) \wedge \\
&\quad\; (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{32})
\end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$\begin{array}{rcll}
n=1: A_1 & = & P_{11} \wedge P_{12} & \text{Länge: } 2^1 \\
n=2: A_2 & = & (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22}) & \\
 & \equiv & ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22}) & \\
 & \equiv & (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}) & \text{Länge: } 2^2 \\
n=3: A_3 & = & \underbrace{(P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})}_{A_2} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) & \\
 & \equiv & \underbrace{((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}))}_{KNF(A_2)} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) & \\
 & \equiv & (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{31}) \wedge & \\
 & & (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{32}) & \\
 & \equiv & (((P_{11} \vee P_{21} \vee P_{31}) \wedge (P_{12} \vee P_{21} \vee P_{31}) \wedge (P_{11} \vee P_{22} \vee P_{31}) \wedge (P_{12} \vee P_{22} \vee P_{31}) \wedge & \\
 & & (((P_{11} \vee P_{21} \vee P_{32}) \wedge (P_{12} \vee P_{21} \vee P_{32}) \wedge (P_{11} \vee P_{22} \vee P_{32}) \wedge (P_{12} \vee P_{22} \vee P_{32}) & \text{Länge: } 2^3
\end{array}$$