

Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 5

2.05.2019

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- **Syntax** (Formeln)
- **Semantik**
 - Wertebelegungen/Valuationen/Modelle
 - Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen
 - Gültigkeit und Erfüllbarkeit
 - Folgerung, Äquivalenz
- **Kalküle**
 - Wahrheitstafelmethode
 - Äquivalenzumformung
 - nicht sehr effizient.

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

Bis jetzt

- **Normalformen**

 - Atome, Literale, Klauseln

 - Konjunktive und Disjunktive Normalform

 - Ableiten von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln

 - Umformen in KNF/DNF

 - Mengenschreibweise

 - Subsumption

- **SAT-Problem** (Erfüllbarkeitsproblem)

 - SAT

 - Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln

 - k -SAT; 3-SAT vs. SAT

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition:

k -KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- Erfüllbarkeit für Formeln in KNF: NP-vollständig (ohne Beweis)
- Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF: NP-vollständig (Beweisidee)
- Erfüllbarkeit für Formeln in 2-KNF: polynomiell entscheidbar (eine der nächsten Vorlesungen)
- Erfüllbarkeit für Formeln in DNF: polynomiell entscheidbar

Horn-Formeln

Defintion:

Horn-Formel: Formel in KNF, in der jede Klausel **höchstens ein positives Literal** enthält

Horn-Formeln

Defintion:

Horn-Formel: Formel in KNF, in der jede Klausel **höchstens ein positives Literal** enthält

Notation: als Implikation

$\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n \vee P$	$P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow P$	$P_1, \dots, P_n \rightarrow P$
$\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n$	$P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow \perp$	$P_1, \dots, P_n \rightarrow$
P	$\top \rightarrow P$	$\rightarrow P$

Horn-Formeln

Defintion:

Horn-Formel: Formel in KNF, in der jede Klausel **höchstens ein positives Literal** enthält

Notation: als Implikation

$\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n \vee P$	$P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow P$	$P_1, \dots, P_n \rightarrow P$
$\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n$	$P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow \perp$	$P_1, \dots, P_n \rightarrow$
P	$\top \rightarrow P$	$\rightarrow P$

$P_1 \wedge \dots \wedge P_n$: Rumpf

P : Kopf

Horn-Formeln

Defintion:

Horn-Formel: Formel in KNF, in der jede Klausel **höchstens ein positives Literal** enthält

Notation: als Implikation

$\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n \vee P$	$P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow P$	$P_1, \dots, P_n \rightarrow P$
$\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n$	$P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow \perp$	$P_1, \dots, P_n \rightarrow$
P	$\top \rightarrow P$	$\rightarrow P$

$P_1 \wedge \dots \wedge P_n$: Rumpf

P : Kopf

$\rightarrow P$: Fakt

Horn Formel: Beispiele

Klausel	Literalismengen	Implikationen
$\neg P$	$\{\neg P\}$	$P \rightarrow$
$Q \vee \neg R \vee \neg S$	$\{Q, \neg R, \neg S\}$	$R, S \rightarrow Q$
$\neg Q \vee \neg S$	$\{\neg Q, \neg S\}$	$Q, S \rightarrow$
R	$\{R\}$	$\rightarrow R$
$\neg Q \vee P$	$\{\neg Q, P\}$	$Q \rightarrow P$

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Lemma. Sei F Hornformel die keine Fakten enthält. Dann ist F erfüllbar.

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Lemma. Sei F Hornformel die keine Fakten enthält. Dann ist F erfüllbar.

Beweis: Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 0$ für alle $P \in \Pi$. Dann $\mathcal{A}(F) = 1$.

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis: (Idee)

Ziel: $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$.

Falls keine Fakten in F : F erfüllbar.

Sonst: Für alle Fakten $\rightarrow P$ in F : $\mathcal{A}(P) := 1$;

Wiederhole das Verfahren für F' , entstanden aus F durch Ersetzung von P mit \top .

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

Eingabe: $F = D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ eine Hornformel

(die Klausel D_i enthält höchstens ein positives Literal, $i = 1, 2, \dots, n$)

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

Eingabe: $F = D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ eine Hornformel

(die Klausel D_i enthält höchstens ein positives Literal)

Ein Atom in F zu markieren, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in F zu markieren

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

0: IF keine Fakten (Klausel " $\rightarrow A$ ") vorhanden
 THEN Ausgabe: erfüllbar
 ELSE markiere alle Fakten in F (Atome A mit $\rightarrow A$ in F)

1: IF keine Klausel $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ in F , so dass
 alle Atome in A_1, \dots, A_n markiert aber B nicht
 THEN Ausgabe: erfüllbar
 ELSE wähle die erste solche Klausel

IF B leer
 THEN Ausgabe: unerfüllbar
 ELSE markiere überall B in F

GOTO 1

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge \\ (\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Konjunktion von Implikationen:

$(P \rightarrow \perp) \wedge$	$P \rightarrow$
$(\top \rightarrow Q) \wedge$	$\rightarrow Q$
$(P \rightarrow R) \wedge$	$P \rightarrow R$
$(Q \rightarrow S) \wedge$	$Q \rightarrow S$
$(W \rightarrow T) \wedge$	$W \rightarrow T$
$(S \rightarrow U) \wedge$	$S \rightarrow U$
$((U \wedge T \wedge Z) \rightarrow P) \wedge$	$U, T, Z \rightarrow P$
$((Q \wedge S \wedge U) \rightarrow W)$	$Q, S, U \rightarrow W$

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

$$P \rightarrow$$
$$\rightarrow \underline{Q}$$
$$P \rightarrow R$$
$$\underline{Q} \rightarrow S$$
$$W \rightarrow T$$
$$S \rightarrow U$$
$$U, T, Z \rightarrow P$$
$$\underline{Q}, S, U \rightarrow W$$

{Q} initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

$$P \rightarrow$$
$$\rightarrow \underline{Q}$$
$$P \rightarrow R$$
$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$
$$W \rightarrow T$$
$$\underline{S} \rightarrow U$$
$$U, T, Z \rightarrow P$$
$$\underline{Q}, \underline{S}, U \rightarrow W$$

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$
 $\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

$$P \rightarrow$$
$$\rightarrow \underline{Q}$$
$$P \rightarrow R$$
$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$
$$W \rightarrow T$$
$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$
$$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$$
$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow W$$

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

$P \rightarrow$	$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$
$\rightarrow \underline{Q}$	$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$
$P \rightarrow R$	$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	$\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$
$\underline{W} \rightarrow T$	
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	
$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$	
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$	

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

$P \rightarrow$	$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$
$\rightarrow \underline{Q}$	$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$
$P \rightarrow R$	$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	$\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$
$\underline{W} \rightarrow \underline{T}$	$\{Q, S, U, W, T\}$ wegen $W \rightarrow T$
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	
$\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$	
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$	

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge \\ (\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W) \quad \text{Erfüllbar}$$

Markierte Atome und Erklärung:

$P \rightarrow$	$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$
$\rightarrow \underline{Q}$	$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$
$P \rightarrow R$	$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	$\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$
$\underline{W} \rightarrow \underline{T}$	$\{Q, S, U, W, T\}$ wegen $W \rightarrow T$
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	Keine weiteren Schritte möglich, da es keine Implikation gibt, deren linke Seite vollständig markiert ist und die rechte Seite nicht
$\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$	
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$	

Modell: $\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(T) = 1, \mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(Z) = 0$

Markierte Atome: wahr; nicht markierte Atome: falsch.

Beispiel 2

$$(\neg P) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge \\ (\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Erfüllbar

Markierte Atome und Erklärung:

$$P \rightarrow$$

$$P \rightarrow R$$

$$Q \rightarrow S$$

$$W \rightarrow T$$

$$S \rightarrow U$$

$$U, T, Z \rightarrow P$$

$$Q, S, U \rightarrow W$$

Keine Schritte möglich, da es keine Implikation gibt, deren linke Seite vollständig markiert ist und die rechte Seite nicht

Modell: $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(Z) = 0$

Beispiel 3

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge \\ (\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U)$$

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$W \rightarrow T$$

$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$

$$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$

Unerfüllbar

Q, S, U markiert, aber Kopf von

$Q, S, U \rightarrow$ leer

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis: (Idee)

Ziel: $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$.

Falls keine Fakten in F : F erfüllbar.

Sonst: Für alle Fakten $\rightarrow P$ in F : $\mathcal{A}(P) := 1$;

Wiederhole das Verfahren für F' , entstanden aus F durch Ersetzung von P mit \top .

Komplexität: $|F| \times |F|$

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

Resolution

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

Resolution

2. Formelmengen

Semantische Tableaux

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

Resolution

2. Formelmengen

Semantische Tableaux

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

Klauseln

{Q} initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$ $Q \mapsto T$

$$P \rightarrow$$

$$\neg P$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$Q$$

$$P \rightarrow R$$

$$\neg P \vee R$$

$$\underline{Q} \rightarrow S$$

$$\neg Q \vee S$$

$$W \rightarrow T$$

$$\neg W \vee T$$

$$S \rightarrow U$$

$$\neg S \vee U$$

$$U, T, Z \rightarrow P$$

$$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$$

$$\underline{Q}, S, U \rightarrow W$$

$$\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W$$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow S$$

$$W \rightarrow T$$

$$S \rightarrow U$$

$$U, T, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, S, U \rightarrow W$$

Klauseln

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$S$$

$$\neg W \vee T$$

$$\neg S \vee U$$

$$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$$

$$\neg S \vee \neg U \vee W$$

{Q} initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$

$Q \mapsto T$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$W \rightarrow T$$

$$\underline{S} \rightarrow U$$

$$U, T, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, U \rightarrow W$$

Klauseln

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$S$$

$$\neg W \vee T$$

$$\neg S \vee U$$

$$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$$

$$\neg S \vee \neg U \vee W$$

{Q} initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$

{Q, S} wegen $Q \rightarrow S$

$Q \mapsto T$

$S \mapsto T$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$W \rightarrow T$$

$$\underline{S} \rightarrow U$$

$$U, T, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, U \rightarrow W$$

Klauseln

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$S$$

$$\neg W \vee T$$

$$U$$

$$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$$

$$\neg U \vee W$$

{Q} initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$

{Q, S} wegen $Q \rightarrow S$

$Q \mapsto T$

$S \mapsto T$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$W \rightarrow T$$

$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$

$$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow W$$

Klauseln

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$S$$

$$\neg W \vee T$$

$$U$$

$$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$$

$$\neg U \vee W$$

{Q} initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

{Q, S} wegen $Q \rightarrow S$

{Q, S, U} wegen $S \rightarrow U$

$Q \mapsto T$

$S \mapsto T$

$U \mapsto T$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$W \rightarrow T$$

$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$

$$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow W$$

Klauseln

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$S$$

$$\neg W \vee T$$

$$U$$

$$\neg T \vee \neg Z \vee P$$

$$W$$

Markierte Atome und Erklärung:

{Q} initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

{Q, S} wegen $Q \rightarrow S$

{Q, S, U} wegen $S \rightarrow U$

$Q \mapsto T$

$S \mapsto T$

$U \mapsto T$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

Klauseln

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$\underline{W} \rightarrow T$$

$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$

$$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$$

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$S$$

$$T$$

$$U$$

$$\neg T \vee \neg Z \vee P$$

$$W$$

{Q}	initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$	$Q \mapsto T$
{Q, S}	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto T$
{Q, S, U}	wegen $S \rightarrow U$	$U \mapsto T$
{Q, S, U, W}	wegen $Q, S, U \rightarrow W$	$W \mapsto T$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

Klauseln

$$P \rightarrow$$

$$\neg P$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$Q$$

$$P \rightarrow R$$

$$\neg P \vee R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$S$$

$$\underline{W} \rightarrow \underline{T}$$

$$T$$

$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$

$$U$$

$$\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$$

$$\neg Z \vee P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$$

$$W$$

{Q} initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$ $Q \mapsto T$

{Q, S} wegen $Q \rightarrow S$ $S \mapsto T$

{Q, S, U} wegen $S \rightarrow U$ $U \mapsto T$

{Q, S, U, W} wegen $Q, S, U \rightarrow W$ $W \mapsto T$

{Q, S, U, W, T} wegen $W \rightarrow T$ $T \mapsto T$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$\underline{W} \rightarrow \underline{T}$$

$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$

$$\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$$

Klauseln

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$S$$

$$T$$

$$U$$

$$\neg Z \vee P$$

$$W$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $T \rightarrow Q$ $Q \mapsto T$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$ $S \mapsto T$

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$ $U \mapsto T$

$\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$ $W \mapsto T$

$\{Q, S, U, W, T\}$ wegen $W \rightarrow T$ $T \mapsto T$

Modell:

$$\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(T) = 1$$

$$\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(Z) = 0$$

Markierte Atome: wahr; nicht markierte Atome: falsch.

Bemerkung

Horn Klauseln:

$$\frac{P \quad P, P_1 \dots P_n \rightarrow Q}{P_1 \dots P_n \rightarrow Q}$$

Klauselschreibweise:

$$\frac{P \quad \neg P \vee \neg P_1 \dots \neg P_n \vee Q}{\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n \vee Q}$$

Mengenschreibweise:

$$\frac{\{P\} \quad \{\neg P, \neg P_1, \neg P_n, Q\}}{\{\neg P_1, \dots, \neg P_n, Q\}}$$

Verallgemeinerung?

Syllogismus (in der ersten Vorlesung erwähnt):

$$\frac{P \quad P \rightarrow C}{C}$$

Mengenschreibweise: 1-Resolution (unit resolution)

$$\frac{\{P\} \quad \{\neg P\} \cup C}{C} \qquad \frac{\{\neg P\} \quad \{P\} \cup C}{C}$$

Verallgemeinerung?

Nicht geeignet für Erfüllbarkeitsüberprüfung beliebiger Klauselmengen:

Die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

ist nicht erfüllbar, aber mit 1-Resolution ist aus M nichts ableitbar, also auch nicht \perp .

Verallgemeinerung?

Nicht geeignet für Erfüllbarkeitsüberprüfung beliebiger Klauselmengen:

Die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

ist nicht erfüllbar, aber mit 1-Resolution ist aus M nichts ableitbar, also auch nicht \perp .

Ziel: Kalkül mit der Eigenschaft dass:

- (1) falls M unerfüllbar \perp ist aus M ableitbar
- (2) falls \perp aus M ableitbar, M unerfüllbar.

⇒ Der Resolutionkalkül

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform
- Eine einzige Regel

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform
- Eine einzige Regel
- Operiert auf Klauseln (in Mengenschreibweise)

Resolutionskalkül

Definition: **Resolutionsregel** (einzige Regel des Kalküls)

$$\frac{C_1 \cup \{P\} \quad \{\neg P\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

wobei

- P eine aussagenlogische Variable
- C_1, C_2 Klauseln (können leer sein)

Definition:

$C_1 \cup C_2$ heißt **Resolvente** von $C_1 \cup \{P\}, C_2 \cup \{\neg P\}$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\underline{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$
$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$
$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$
$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$
$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\perp}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$
$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$
$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\perp}$$

Insgesamt: $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

also: M unerfüllbar

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

ist allgemeingültig

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

ist allgemeingültig

Dazu zeigen wir, dass

$$\neg[(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))]$$

unerfüllbar ist.

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

ist allgemeingültig

Dazu zeigen wir, dass

$$\neg[(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))]$$

unerfüllbar ist.

Klauselnormalform:

$$\{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M :

- (1) $\{\neg P, Q\}$ gegeben
- (2) $\{\neg Q, R\}$ gegeben
- (3) $\{P\}$ gegeben
- (4) $\{\neg R\}$ gegeben

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M :

- (1) $\{\neg P, Q\}$ gegeben
- (2) $\{\neg Q, R\}$ gegeben
- (3) $\{P\}$ gegeben
- (4) $\{\neg R\}$ gegeben
- (5) $\{Q\}$ aus (1) und (3)

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalfom:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M :

- (1) $\{\neg P, Q\}$ gegeben
- (2) $\{\neg Q, R\}$ gegeben
- (3) $\{P\}$ gegeben
- (4) $\{\neg R\}$ gegeben
- (5) $\{Q\}$ aus (1) und (3)
- (6) $\{R\}$ aus (2) und (5)

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M :

- (1) $\{\neg P, Q\}$ gegeben
- (2) $\{\neg Q, R\}$ gegeben
- (3) $\{P\}$ gegeben
- (4) $\{\neg R\}$ gegeben
- (5) $\{Q\}$ aus (1) und (3)
- (6) $\{R\}$ aus (2) und (5)
- (7) \perp aus (4) und (6)

Resolution: Bemerkungen

Vorsicht bei Klauseln mit mehreren Resolutionsmöglichkeiten

- Zwei Klauseln können mehr als eine Resolvente haben
z.B.: $\{A, B\}$ und $\{\neg A, \neg B\}$
- $\{A, B, C\}$ und $\{\neg A, \neg B, D\}$ haben **NICHT** $\{C, D\}$ als Resolvente

Resolution: Bemerkungen

Vorsicht bei Klauseln mit mehreren Resolutionsmöglichkeiten

- Zwei Klauseln können mehr als eine Resolvente haben
z.B.: $\{A, B\}$ und $\{\neg A, \neg B\}$
- $\{A, B, C\}$ und $\{\neg A, \neg B, D\}$ haben **NICHT** $\{C, D\}$ als Resolvente

Heuristik: Immer möglichst kleine Klauseln ableiten

Zusammenfassung

- SAT-Probleme (SAT, 3-SAT, 2-SAT, DNF-SAT)
- Horn-Formeln
- Erfüllbarkeitstest für Hornformeln
- 1-Resolution (unvollständig)
- Der aussagenlogische Resolutionskalkül

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (ohne Mengenschreibweise)

$$\begin{array}{cccc} \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} & \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} & \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} & \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_1 \vee P_1} \\ \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1} & \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_2 \vee P_2} & \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} & \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} \end{array}$$

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (ohne Mengenschreibweise)

$$\begin{array}{cccc} \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} & \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} & \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} & \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_1 \vee P_1} \\ \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1} & \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_2 \vee P_2} & \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} & \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} \end{array}$$

Auf diese Weise ist \perp nicht herleitbar

Ohne Mengenschreibweise

Resolutionsregel:

$$\frac{C_1 \vee P \quad \neg P \vee C_2}{C_1 \vee C_2}$$

Faktorisieren:

$$\frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}$$

Resolution mit Faktorisierung

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (mit Faktorisieren)

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} & \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} & \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} & \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_1 \vee P_1} \\
 \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1} & \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_2 \vee P_2} & \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} & \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} \\
 & \frac{P_1 \vee P_1}{P_1} & \frac{\neg P_1 \vee \neg P_1}{\neg P_1} & \frac{P_2 \vee P_2}{P_2} & \frac{\neg P_2 \vee \neg P_2}{\neg P_2} \\
 & & \frac{P_1 \quad \neg P_1}{\perp} & &
 \end{array}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$
$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$
$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\perp}$$

Insgesamt: $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

also: M unerfüllbar