

Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 3

28.05.2019

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Prädikatenlogik

Syntax

1. Logische Symbole:

1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top, \perp; \neg; \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

1.2: Quantoren: \forall, \exists .

2. Nichtlogische Symbole: Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,

2.1: Ω Menge von Funktionssymbolen. **Notation:** f/n : f hat Stelligkeit $n \geq 0$,

2.2: Π Menge von Prädikatensymbolen. **Notation:** p/m : p hat Stelligkeit $m \geq 0$.

(Das Gleichheitsprädikat \approx kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

Funktionssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstanten.

Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen.

3. Variablen: X vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen, die wir für (die Bezeichnung von) **Variablen** verwenden.

Bis jetzt

Prädikatenlogik

- Syntax
 - Signatur
 - Terme
 - Formeln
 - Substitutionen
- Semantik

Jetzt

Prädikatenlogik

- Syntax
 - Signatur
 - Terme
 - Formeln
 - Substitutionen
- Semantik

Semantik

Semantik geben bedeutet für logische Systeme, einen Begriff von Wahrheit für Formeln zu definieren. Das hier für die Prädikatenlogik zu definierende Konzept geht auf Tarski zurück.

In der **klassischen Logik** (zurückgehend auf Aristoteles) gibt es „nur“ die zwei Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“, die wir mit 1 und 0 bezeichnen.

Strukturen

Definition.

Eine Σ -Struktur (bzw. Σ -Interpretation bzw. Σ -Modell) ist ein Tripel

$$\mathcal{A} = (U, (f_{\mathcal{A}} : U^n \rightarrow U)_{f/n \in \Omega}, (p_{\mathcal{A}} \subseteq U^m)_{p/m \in \Pi})$$

wobei $U \neq \emptyset$ eine Menge, genannt **Universum** von \mathcal{A} .

Oft identifizieren wir U mit \mathcal{A} , wenn die Interpretation der Funktions- und Prädikatensymbole eindeutig aus dem Kontext hervorgeht.

Mit Σ -Str bezeichnen wir die Menge aller Σ -Strukturen.

Strukturen

Beispiel:

$$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$$

$$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \{0_{\mathcal{N}}, +_{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}, \{\leq_{\mathcal{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \approx_{\mathcal{N}}\})$$

$$0_{\mathcal{N}} = 0 \in \mathbb{N},$$

$$+_{\mathcal{N}}(n_1, n_2) = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$$

$$\leq_{\mathcal{N}} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\}$$

Strukturen

Beispiel:

$$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$$

Eine andere Σ -Struktur:

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{0_{\mathcal{A}}, +_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}, \{\leq_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \approx_{\mathcal{N}}\})$$

$$0_{\mathcal{A}} = 1 \in \mathbb{N},$$

$$+_{\mathcal{A}}(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n_2 = 0 \\ n_1^{n_2} & \text{wenn } n_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\leq_{\mathcal{A}} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 = n_2^2\}$$

Strukturen

Beispiel:

$$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$$

Eine dritte Σ -Struktur:

$$\mathcal{B} = (\{a, b\}, \{0_{\mathcal{B}}, +_{\mathcal{B}}: \{a, b\} \times \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}\}, \{\leq_{\mathcal{B}} \subseteq \{a, b\} \times \{a, b\}, \approx_{\mathcal{B}}\})$$

$$0_{\mathcal{B}} = a \in \{a, b\},$$

$$+_{\mathcal{B}}(a, a) = a; \quad +_{\mathcal{B}}(a, b) = b;$$

$$+_{\mathcal{B}}(b, a) = b; \quad +_{\mathcal{B}}(b, b) = b;$$

$$\leq_{\mathcal{B}} = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$$

Valuationen

Variablen für sich haben keine Bedeutung. Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Definition.

Unter einer **(Variablen-) Belegung** oder einer **Valuation** (über einer Σ -Struktur \mathcal{A}) versteht man eine Abbildung

$$\beta : X \rightarrow U$$

Wert eines Terms in \mathcal{A} bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \quad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \dots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \dots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \quad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in \mathcal{A} bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \quad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \dots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \dots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \quad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in \mathcal{A} bzgl. β , $\mathcal{A}(\beta)(t)$:

- Falls $t = x \in X$: $\mathcal{A}(\beta)(t) = \beta(x)$
- Falls $t = c$ eine Konstante: $\mathcal{A}(\beta)(t) = c_{\mathcal{A}}$

Wert eines Terms in \mathcal{A} bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \quad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \dots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \dots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \quad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in \mathcal{A} bzgl. β , $\mathcal{A}(\beta)(t)$:

- Falls $t = x \in X$: $\mathcal{A}(\beta)(t) = \beta(x)$
- Falls $t = c$ eine Konstante: $\mathcal{A}(\beta)(t) = c_{\mathcal{A}}$
- Falls $t = f(t_1, \dots, t_n)$:
$$\mathcal{A}(\beta)(t) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(t_1), \dots, \mathcal{A}(\beta)(t_n))$$

Wert eines Terms in \mathcal{A} bzgl. β

Beispiel:

$$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$$

$$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \{0_{\mathcal{N}}, +_{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}, \{\leq_{\mathcal{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \approx_{\mathcal{N}}\})$$

$$0_{\mathcal{N}} = 0 \in \mathbb{N},$$

$$+_{\mathcal{N}}(n_1, n_2) = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$$

$$\beta : \{x, y, z\} \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } \beta(x) = 5, \beta(y) = 10, \beta(z) = 3$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\beta)((x + (y + z)) + (z + 0)) &= \\ &= (\beta(x) +_{\mathcal{N}} (\beta(y) +_{\mathcal{N}} \beta(z))) +_{\mathcal{N}} (\beta(z) +_{\mathcal{N}} 0_{\mathcal{N}}) = \\ &= (5 + (10 + 3)) + (3 + 0) = 21 \end{aligned}$$

Wahrheitswert einer Formel in \mathcal{A} bzgl. β

Die Menge der **Wahrheitswerte** sei $\{0, 1\}$.

$\mathcal{A}(\beta) : \text{For}_\Sigma \rightarrow \{0, 1\}$ wird induktiv über Aufbau von F wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}(\beta)(\perp) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(\top) = 1$$

Wahrheitswert einer Formel in \mathcal{A} bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(p(s_1, \dots, s_n)) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad (\mathcal{A}(\beta)(s_1), \dots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)) \in p_{\mathcal{A}}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(s \approx t) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(s) = \mathcal{A}(\beta)(t)$$

Wahrheitswert einer Formel in \mathcal{A} bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Wahrheitswert einer Formel in \mathcal{A} bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = \neg_b \mathcal{A}(\beta)(F)$, wobei \neg_b die Negation auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

w	$\neg_b w$
0	1
1	0

Wahrheitswert einer Formel in \mathcal{A} bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \wedge G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \wedge_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei \wedge_b die Konjunktion auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

\wedge_b	0	1
0	0	0
1	0	1

Wahrheitswert einer Formel in \mathcal{A} bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \vee G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \vee_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei \vee_b die Disjunktion auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

\vee_b	0	1
0	0	1
1	1	1

Wahrheitswert einer Formel in \mathcal{A} bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \rightarrow G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei \rightarrow_b die Implikation auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

\rightarrow_b	0	1
0	1	1
1	0	1

Wahrheitswert einer Formel in \mathcal{A} bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \leftrightarrow G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \leftrightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei \leftrightarrow_b die Äquivalenz auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

\leftrightarrow_b	0	1
0	1	0
1	0	1

Beispiel

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$$

$$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\} \text{ mit Gleichheit } \approx .$$

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \\ n_1 +_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 + n_2 \\ n_1 *_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 \cdot n_2$$

$$s_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \\ s(n) = n + 1 \\ 0_{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}\}$$

$$\{\leq, <_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \}$$

$$(n_1, n_2) \in \leq_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$(n_1, n_2) \in <_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$\text{gerade}_{\mathcal{A}}, \text{ungerade}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}\}$$

$$\text{gerade}_{\mathcal{A}} = \{0, 2, 4, \dots, 2k \dots\}$$

$$\text{ungerade}_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1 \dots\},$$

Konvention: Auf den nächsten Folien wird der Unterschied zwischen den natürlichen Zahlen 0, 1 und den Wahrheitswerten 0 (falsch) und 1 (wahr) deutlich gemacht, indem wir die Wahrheitswerte in **orangener** Farbe schreiben.

Nota Bene:

- Der Wert eines Termes t in \mathcal{A} bzgl. β ist ein Element in das Universum von \mathcal{A} .
- Der Wahrheitswert einer Formel F in \mathcal{A} bzgl. β ist ein Wahrheitswert (**0** oder **1**).

Beispiel

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$$

$$\Pi = \{\leq /2, < /2, gerade/1, ungerade/1\} \text{ mit Gleichheit } \approx .$$

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

$$n_1 +_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 + n_2$$

$$n_1 *_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 \cdot n_2$$

$$s_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

$$s(n) = n + 1$$

$$0_{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}\}$$

$$\{\leq, <_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \}$$

$$(n_1, n_2) \in \leq_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$(n_1, n_2) \in <_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$\text{gerade}_{\mathcal{A}}, \text{ungerade}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}\}$$

$$\text{gerade}_{\mathcal{A}} = \{0, 2, 4, \dots, 2k \dots\}$$

$$\text{ungerade}_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1 \dots\},$$

$$\beta : X \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } \beta(x) = 1, \beta(y) = 4$$

$$(1) \mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = 0 \quad \text{Erklärung: } \mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x) = 1 \notin \text{gerade}_{\mathcal{A}}$$

$$(2) \mathcal{A}(\beta))(s(s(x) + s(0)) \approx y) = 1 \quad \text{Erklärung: } \mathcal{A}(\beta)(s(s(x) + s(0))) = s_{\mathcal{A}}(s_{\mathcal{A}}(\beta(x)) +_{\mathcal{A}} s_{\mathcal{A}}(0_{\mathcal{A}}))$$

$$= ((1+1) + (0+1)) + 1 = 4$$

$$\mathcal{A}(\beta)(y) = 4$$

$$\text{und } 4 = 4$$

$$(3) \mathcal{A}(\beta))(x \approx y) = 0 \quad \text{Erklärung: } \mathcal{A}(\beta)(x) = 1; \quad \mathcal{A}(\beta)(y) = 4, \quad 1 \neq 4$$

Beispiel

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$$

$$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\} \text{ with equality } \approx .$$

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

$$n_1 +_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 + n_2$$

$$n_1 *_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 \cdot n_2$$

$$s_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

$$s(n) = n + 1$$

$$0_{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}\}$$

$$\{\leq, <_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \}$$

$$(n_1, n_2) \in \leq_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$(n_1, n_2) \in <_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$\text{gerade}_{\mathcal{A}}, \text{ungerade}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}\}$$

$$\text{gerade}_{\mathcal{A}} = \{0, 2, 4, \dots, 2k \dots\}$$

$$\text{ungerade}_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1 \dots\},$$

$$\beta : X \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } \beta(x) = 1, \beta(y) = 4$$

$$(4) \mathcal{A}(\beta)(\neg \text{gerade}(x)) = \neg_b \mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = \neg_b 0 = 1$$

$$(5) \mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0) \vee \text{gerade}(x)) = \mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0)) \vee_b \mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = 1 \vee_b 0 = 1$$

Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0)) = 1$: $\mathcal{A}(\beta)(x) = 1$, $\mathcal{A}(s(0)) = s_{\mathcal{A}}(0_{\mathcal{A}}) = 0 + 1 = 1$, und $(1, 1) \in \leq_{\mathcal{A}}$.

$$(6) \mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0) \rightarrow \text{ungerade}(y)) = \mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0)) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(\text{ungerade}(y)) = 0 \rightarrow_b 0 = 1$$

Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0)) = 0$, da $\beta(y) = 4$, $\beta(s(0)) = 1$ und $(4, 1) \notin \leq_{\mathcal{A}}$;
 $\mathcal{A}(\beta)(\text{ungerade}(y)) = 0$ da $\beta(y) = 4 \notin \text{ungerade}_{\mathcal{A}}$.

Wahrheitswert einer Formel in \mathcal{A} bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\forall x F) = \min_{a \in U} \{ \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) \} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für alle } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\mathcal{A}(\beta)(\exists x F) = \max_{a \in U} \{ \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) \} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für mindestens} \\ & \text{ein } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \in X$ und $a \in U$ bezeichne $\beta[x \mapsto a] : X \rightarrow U$ die Belegung, mit

$$\beta[x \mapsto a](y) := \begin{cases} a & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wahrheitswert einer Formel in \mathcal{A} bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\forall x F) = \min_{a \in U} \{ \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) \} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für alle } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\mathcal{A}(\beta)(\exists x F) = \max_{a \in U} \{ \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) \} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für mindestens} \\ & \text{ein } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \in X$ und $a \in U$ bezeichne $\beta[x \mapsto a] : X \rightarrow U$ die Belegung, mit

$$\beta[x \mapsto a](y) := \begin{cases} a & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Intuition: \forall : verallgemeinerte Konjunktion (\bigwedge_b ist minimum auf $\{0, 1\}$)

\exists : verallgemeinerte Disjunktion (\bigvee_b ist maximum auf $\{0, 1\}$)

Drei Logiker kommen in eine Bar

“Wollt ihr alle ein Bier?”, fragt die Kellnerin.

“Weiß ich nicht”, sagt der erste Logiker.

“Weiß ich nicht”, sagt der zweite Logiker.

“Ja!”, sagt der dritte Logiker.

Erklärung des Witzes

Logiker 1 will ein Bier, aber er weiß nicht, was seine Begleiter wollen, deshalb kann er die Frage weder mit “ja” noch mit “nein” beantworten.

Logiker 2 kann aus der Antwort von Logiker 1 schließen, dass der Durst auf ein Bier hat. Denn wäre das nicht der Fall, dann könnte er die Frage mit “nein” beantworten (ein Satz, der mit “Alle” beginnt, wird schon durch eine einzige Ausnahme falsch.)

Logiker 2 möchte auch gern ein Bier, aber weil er nichts über den Durst von Logiker 3 weiß, muss er auch mit “Weiß ich nicht” antworten.

Erst Logiker 3 kann eine definitive Antwort geben: Er weiß, dass seine beiden Begleiter ein Bier trinken möchten, er selber möchte auch eins - also antwortet er mit “Ja!”

Beispiel

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$$

$$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\} \text{ with equality } \approx .$$

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

$$n_1 +_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 + n_2$$

$$n_1 *_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 \cdot n_2$$

$$s_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

$$s(n) = n + 1$$

$$0_{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}\}$$

$$\{\leq, <_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \}$$

$$(n_1, n_2) \in \leq_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$(n_1, n_2) \in <_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$\text{gerade}_{\mathcal{A}}, \text{ungerade}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}\}$$

$$\text{gerade}_{\mathcal{A}} = \{0, 2, 4, \dots, 2k \dots\}$$

$$\text{ungerade}_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1 \dots\},$$

$$\beta : X \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } \beta(x) = 1, \beta(y) = 4$$

$$(7) \mathcal{A}(\beta)(\forall x \text{gerade}(x)) = \min_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x))) = 0$$

Erklärung:

Falls $a = 2k$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \in \text{gerade}_{\mathcal{A}}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x))) = 1$.

Falls $a = 2k + 1$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \notin \text{gerade}_{\mathcal{A}}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x))) = 0$.

Es gibt $a \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x))) = 0$.

$$\min_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x))) = \min\{1, 0\} = 0$$

Beispiel

$$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$$

$$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\} \text{ with equality } \approx .$$

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

$$n_1 +_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 + n_2$$

$$n_1 *_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 \cdot n_2$$

$$s_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

$$s(n) = n + 1$$

$$0_{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}\}$$

$$\{\leq, <_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \}$$

$$(n_1, n_2) \in \leq_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$(n_1, n_2) \in <_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$\text{gerade}_{\mathcal{A}}, \text{ungerade}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}\}$$

$$\text{gerade}_{\mathcal{A}} = \{0, 2, 4, \dots, 2k \dots\}$$

$$\text{ungerade}_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1 \dots\},$$

$$\beta : X \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } \beta(x) = 1, \beta(y) = 4$$

$$(8) \mathcal{A}(\beta)(\exists x \text{gerade}(x)) = \max_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x))) = 1$$

Erklärung:

Falls $a = 2k$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \in \text{gerade}_{\mathcal{A}}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x))) = 1$.

Falls $a = 2k + 1$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \notin \text{gerade}_{\mathcal{A}}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x))) = 0$.

Es gibt $a \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x))) = 1$.

$$\max_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x))) = \max\{1, 0\} = 1$$

Beispiel 2

$$U_{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$0_{\mathbb{N}} = 0 \in U_{\mathbb{N}}$$

$$s_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}} \rightarrow U_{\mathbb{N}}, \quad s_{\mathbb{N}}(n) = n + 1$$

$$+_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}}^2 \rightarrow U_{\mathbb{N}}, \quad +_{\mathbb{N}}(n, m) = n + m$$

$$*_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}}^2 \rightarrow U_{\mathbb{N}}, \quad *_{\mathbb{N}}(n, m) = n * m$$

$$\leq_{\mathbb{N}} = \text{“kleiner-gleich”} \subseteq U_{\mathbb{N}}^2$$

$$<_{\mathbb{N}} = \text{“kleiner”} \subseteq U_{\mathbb{N}}^2$$

Mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 3$ ergibt sich beispielsweise:

$$\mathbb{N}(\beta)(s(x) + s(0)) = 3$$

$$\mathbb{N}(\beta)(x + y \approx s(y)) = 1$$

$$\mathbb{N}(\beta)(\forall x, y(x + y \approx y + x)) = 1$$

$$\mathbb{N}(\beta)(\forall z z \leq y) = 0$$

$$\mathbb{N}(\beta)(\forall x \exists y x < y) = 1$$

Beispiel 2

$$(1) \quad \mathbb{N}(\beta)(s(x) + s(0)) = s_{\mathbb{N}}(\beta(x)) +_{\mathbb{N}} s_{\mathbb{N}}(0_{\mathbb{N}}) = (1 + 1) + (0 + 1) = 3$$

$$(2) \quad \mathbb{N}(\beta)(x + y \approx s(y)) = 1$$

Erklärung:

$$\mathbb{N}(\beta)(x + y) = \beta(x) +_{\mathbb{N}} \beta(y) = 1 + 3 = 4$$

$$\mathbb{N}(\beta)(s(y)) = s_{\mathbb{N}}(\beta(y)) = 3 + 1 = 4.$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \mathbb{N}(\beta)(\forall x, y(x + y \approx y + x)) &= \min_{a \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a])(\forall y(x + y \approx y + x)) \\ &= \min_{a \in \mathbb{N}} \min_{b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x + y \approx y + x) \\ &= \min_{a, b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x + y \approx y + x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

da für alle $a, b \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x + y) = a + b = b + a = \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(y + x)$$

Beispiel 2

$$(4) \quad \mathbb{N}(\beta)(\forall z \ z \leq y) = \min_{a \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z \leq y) = 0$$

Erklärung:

Falls $a = 4$, so $\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z \leq y) = 0$, da:

$$\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z) = a = 4$$

$$\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(y) = \beta(y) = 3$$

und $(4, 3) \notin \leq_{\mathbb{N}}$.

$$(5) \quad \mathbb{N}(\beta)(\forall x \exists y \ x < y) = \min_{a \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a])(\exists y \ x < y) \\ = \min_{a \in \mathbb{N}} \max_{b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$$

Erklärung:

Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$: $\max_{b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$,

da es gibt $b = a + 1 \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$

weil $\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x) = a$

$\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(y) = b = a + 1$ und $(a, a + 1) \in <_{\mathbb{N}}$.