

Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 6

18.06.2019

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Organisatorisches

- Klausur: 31.07.2019, 13:00-15:00, Raum D 028
Anmeldung: von 24.06.2019 bis 23.07.2019
Rücktritt bis 24.07.2019
- Nachklausur: 10.10.2019, 9:00-11:00, Raum D 028
(Anfragestatus: noch nicht bestätigt)
Anmeldung: voraussichtlich von 3.09.2019 bis 2.10.2019
Rücktritt: voraussichtlich bis 3.10.2019
- Question/Answer Session: 18.07.2019

Bis jetzt

Syntax

- Prädikatenlogische Signatur
- Term, Atom, Formel

Semantik

- Prädikatenlogisches Modell
- Auswertung von Formeln in Modellen
- Erfüllbarkeit, Gültigkeit; Folgerung, Äquivalenz
- Eigenschaften von Quantoren (Vertauschbarkeit untereinander und mit \wedge, \vee)

Substitutionslemma

Unentschiedbarkeit der Erfüllbarkeit von Formeln

Unser Ziel

Kalküle zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

Normalformen

Definition. Eine Formel $F \in \text{For}_\Sigma$ ist in Negationsnormalform (NNF), falls:

- $\rightarrow, \leftrightarrow$ kommen in F nicht vor
- jedes Negationszeichen in F steht direkt vor einem Atom (insbes. auch kein $\neg\neg$)

Definition. Eine Formel $F \in \text{For}_\Sigma$ ist **bereinigt**, falls:

- Keine Variable in F sowohl gebunden als auch frei vorkommt
- Keine Variable mehr als einmal in F quantifiziert ist

Definition: Pränexe Formeln sind von der Form $Q_1x_1 \dots Q_nx_n F$, wobei F quantorenfrei, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. Hierbei heißt $Q_1x_1 \dots Q_nx_n$ der **Quantorenpräfix** und F die **Matrix** der Formel.

Definition. Eine Formel $F \in \text{For}_\Sigma$ ist in Skolemnormalform (SNF), falls:

- F ist in Pränexnormalform
- F enthält nur universelle Quantoren

Pränexe Normalform

Theorem. Zu jeder Formel $F \in \text{For}_\Sigma$ gibt es eine äquivalente Formel in Pränexnormalform

Konstruktiver Beweis

(1) Formel in NNF transformieren

1. Elimination von \leftrightarrow

2. Elimination von \rightarrow

3. “Nach innen schieben” von \neg

– aussagenlogische Umformungen (de Morgans Regeln; $\neg\neg A \equiv A$)

$$- \neg \forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$$

$$- \neg \exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x)$$

(2) Formel bereinigen

(3) Alle Quantoren nach vorne (Reihenfolge unverändert lassen)

Skolemnormalform

Definition. Eine Formel $F \in \text{For}_\Sigma$ ist in Skolemnormalform (SNF), falls:

- F ist in Pränexnormalform
- F enthält nur universelle Quantoren

Skolemnormalform

Definition. Eine Formel $F \in \text{For}_\Sigma$ ist in Skolemnormalform (SNF), falls:

- F ist in Pränexnormalform
- F enthält nur universelle Quantoren

Beispiele:

In Skolemnormalform

$$\forall x \forall y (p(x) \vee q(y))$$

Nicht in Skolemnormalform

$$\forall x p(x) \vee \forall y q(y)$$

$$\forall x \exists y (p(x) \vee q(y))$$

Skolemisierung

Skolemisierung: Transformation \Rightarrow_S :

$$\forall x_1, \dots, x_n \exists y F \quad \Rightarrow_S \quad \forall x_1, \dots, x_n F[f(x_1, \dots, x_n)/y]$$

wobei f/n ein neues Funktionssymbol (**Skolemfunktion**).

Skolemisierung

Beispiel

Gegeben:

$$\forall w(\exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z))))$$

Pränexnormalform:

$$\forall w \exists x \forall y \exists z ((p(w, x) \vee (q(w, x, y) \wedge r(y, z))))$$

Skolemisierung: $x \mapsto sk_x(w), z \mapsto sk_z(w, y)$

$$\forall w \forall y ((p(w, sk_x(w)) \vee (q(w, sk_x(w), y) \wedge r(y, sk_z(w, y)))))$$

Skolemisierung

Zusammen:

$$F \xRightarrow{*}_P \underbrace{G}_{\text{pränexe Form}} \xRightarrow{*}_S \underbrace{H}_{\text{pränex, kein } \exists}$$

Theorem:

Seien F , G und H wie oben angenommen. Dann:

- (1) F und G sind äquivalent.
- (2) G erfüllbar (bzgl. Σ -Str) gdw. H erfüllbar (bzgl. Σ' -Str)
wobei $\Sigma' = (\Omega \cup SKF, \Pi)$, wenn $\Sigma = (\Omega, \Pi)$.

Skolemisierung

Lemma. Sei $G = \forall x_1, \dots, x_n \exists y G_1$ und $H = \forall x_1, \dots, x_n G_1[f(x_1, \dots, x_n)/y]$, wobei f ein neues Funktionssymbol (**Skolemfunktion**) ist.

G erfüllbar (bezgl. Σ -Str.) genau dann, wenn H erfüllbar (bezgl. Σ' -Str.).

wobei: $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und $\Sigma' = (\Omega \cup \{f\}, \Pi)$.

Beweis: (1) G erfüllbar $\Rightarrow H$ erfüllbar

Sei \mathcal{A} eine Σ -Struktur und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A}(\beta)(G) = 1$.

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{A}(\beta)(G) &= \min_{a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n])(\exists y G_1) \\ &= \min_{a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}} \max_{b \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) \end{aligned}$$

d.h. für alle $a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}$ es gibt ein $b \in U_{\mathcal{A}}$ mit:

$$\mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) = 1.$$

Wir definieren eine Σ' -struktur \mathcal{A}' , in der alle Funktionen und Prädikate in Σ wie in \mathcal{A} definiert sind und in der wir für alle $a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}$, $f(a_1, \dots, a_n) := b$ definieren.

$$\text{Dann } \mathcal{A}'(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n])(G_1[f(x_1, \dots, x_n)/y]) = 1.$$

Skolemisierung

Lemma. Sei $G = \forall x_1, \dots, x_n \exists y G_1$ und $H = \forall x_1, \dots, x_n G_1[f(x_1, \dots, x_n)/y]$, wobei f ein neues Funktionssymbol (**Skolemfunktion**) ist.

G erfüllbar (bezgl. Σ -Str.) genau dann, wenn H erfüllbar (bezgl. Σ' -Str.).

wobei: $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und $\Sigma' = (\Omega \cup \{f\}, \Pi)$.

Beweis: (2) H erfüllbar $\Rightarrow G$ erfüllbar

Sei \mathcal{A}' eine Σ' -Struktur und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}'}$ mit $\mathcal{A}'(\beta)(H) = 1$.

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{A}'(\beta)(H) &= \min_{a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}'}} \mathcal{A}'(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n])(G_1[f(x_1, \dots, x_n)/y]) \\ &= \min_{a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}'}} (\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto f_{\mathcal{A}'}(a_1, \dots, a_n)])(G_1) \end{aligned}$$

d.h. für alle $a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}'}$ es gibt ein $b = f_{\mathcal{A}'}(a_1, \dots, a_n) \in U_{\mathcal{A}'}$ mit:

$$\mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } \mathcal{A}(\beta)(G) &= \min_{a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n])(\exists y G_1) \\ &= \min_{a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}} \max_{b \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) = 1 \end{aligned}$$

wobei \mathcal{A} ist \mathcal{A}' ohne die Funktion f .

Skolemisierung

Theorem:

Seien F , G und H wie oben angenommen. Dann:

- (1) F und G sind äquivalent.
- (2) G erfüllbar gdw. H erfüllbar
 (bzgl. Σ -Str) (bzgl. Σ' -Str)
 wobei $\Sigma' = (\Omega \cup SKF, \Pi)$, wenn $\Sigma = (\Omega, \Pi)$.

Beweisidee: Die Lemma (auf Seiten 12–13) wird sukzessive für alle existentiell quantifizierten Variablen (von links nach rechts) angewandt.

Klauselnormalform (konjunktive Normalform)

Transformationsregeln \Rightarrow_K

$$(1) \quad (F \leftrightarrow G) \Rightarrow_K (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$

$$(2) \quad (F \rightarrow G) \Rightarrow_K (\neg F \vee G)$$

$$(3) \quad \neg(F \vee G) \Rightarrow_K (\neg F \wedge \neg G)$$

$$(4) \quad \neg(F \wedge G) \Rightarrow_K (\neg F \vee \neg G)$$

$$(5) \quad \neg\neg F \Rightarrow_K F$$

$$(\neg\forall) \quad \neg\forall x F \Rightarrow_K \exists x \neg F$$

$$(\neg\exists) \quad \neg\exists x F \Rightarrow_K \forall x \neg F \quad (NNF)$$

(P) Pränex Normalform

(S) Skolemisierung

$$(6) \quad (F \wedge G) \vee H \Rightarrow_K (F \vee H) \wedge (G \vee H)$$

$$(7) \quad (F \wedge \top) \Rightarrow_K F$$

$$(8) \quad (F \wedge \perp) \Rightarrow_K \perp$$

$$(9) \quad (F \vee \top) \Rightarrow_K \top$$

$$(10) \quad (F \vee \perp) \Rightarrow_K F \quad (KNF)$$

Gesamtbild

$$\begin{array}{llll}
 F & \xRightarrow{*}_P & Q_1 y_1 \dots Q_n y_n G & (G \text{ quantorenfrei}) \quad \text{Pränexnormalform} \\
 & \xRightarrow{*}_S & \forall x_1, \dots, x_m H & (H \text{ quantorenfrei}) \quad \text{Skolemnormalform} \\
 & \xRightarrow{*}_K & \underbrace{\forall x_1, \dots, x_n}_{\text{weglassen}} \bigwedge_{i=1}^k \underbrace{\bigvee_{j=1}^{n_j} L_{ij}}_{\text{Klauseln } C_i} & \text{Skolemnormalform} \\
 & & & \text{mit Matrix in KNF} \\
 & & \underbrace{\hspace{15em}}_{F'} &
 \end{array}$$

$N = \{C_1, \dots, C_k\}$ heißt **Klausel(normal)form** (KNF) von F .

Merke: Die Variablen in Klauseln sind implizit allquantifiziert.

Falls F freie Variablen enthält, werden diese Variablen mit Konstanten ersetzt
 ($F(x)$ erfüllbar gdw. $\exists x F(x)$ erfüllbar)

Theorem: F ist erfüllbar, gdw. F' erfüllbar, gdw. N erfüllbar.

Viel **Optimierungspotential** vorhanden, wenn nur Erfüllbarkeit bewahrt werden muß und kann: Größenexplosion, kleine Stelligkeit von Skolemfunktionen.

Beispiel

$$F := \exists z \left((\forall x(p(u, z, x))) \rightarrow (\forall y(q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))) \right)$$

Beispiel

$$F := \exists z \left((\forall x(p(u, z, x))) \rightarrow (\forall y(q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))) \right)$$

Pränexnormalform:

$$\begin{aligned} F &\equiv \exists z \left((\neg \forall x p(u, z, x)) \vee (\forall y (q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))) \right) \\ &\equiv \exists z \left((\exists x \neg p(u, z, x)) \vee (\forall y (q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))) \right) && \text{(NNF)} \\ &\equiv \exists z \left((\exists x \neg p(u, z, x)) \vee (\forall y (q(z, y) \wedge (\exists x_1 r(y, x_1)))) \right) && \text{(Bereinigung)} \\ &\equiv \exists z \exists x \forall y \exists x_1 (\neg p(u, z, x) \vee (q(z, y) \wedge r(y, x_1))) && \text{(Pränexnormalform)} \end{aligned}$$

Beispiel

$$F := \exists z \left((\forall x(p(u, z, x))) \rightarrow (\forall y(q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))) \right)$$

Pränexnormalform:

$$\begin{aligned} F &\equiv \exists z \left((\neg \forall x p(u, z, x)) \vee (\forall y (q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))) \right) \\ &\equiv \exists z \left((\exists x \neg p(u, z, x)) \vee (\forall y (q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))) \right) && \text{(NNF)} \\ &\equiv \exists z \left((\exists x \neg p(u, z, x)) \vee (\forall y (q(z, y) \wedge (\exists x_1 r(y, x_1)))) \right) && \text{(Bereinigung)} \\ &\equiv \exists z \exists x \forall y \exists x_1 (\neg p(u, z, x) \vee (q(z, y) \wedge r(y, x_1))) && \text{(Pränexnormalform)} \end{aligned}$$

Skolemisierung $u \mapsto sk_u, z \mapsto sk_z; x \mapsto sk_x; x_1 \mapsto sk_{x_1}(y)$

$$\Rightarrow_S^* \forall y (\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee (q(sk_z, y) \wedge r(y, sk_{x_1}(y))))$$

(Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform)

Beispiel

$$F := \exists z \left((\forall x(p(u, z, x))) \rightarrow (\forall y(q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))) \right)$$

Pränexnormalform:

$$\begin{aligned} F &\equiv \exists z \left((\neg \forall x p(u, z, x)) \vee (\forall y (q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))) \right) \\ &\equiv \exists z \left((\exists x \neg p(u, z, x)) \vee (\forall y (q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))) \right) && \text{(NNF)} \\ &\equiv \exists z \left((\exists x \neg p(u, z, x)) \vee (\forall y (q(z, y) \wedge (\exists x_1 r(y, x_1)))) \right) && \text{(Bereinigung)} \\ &\equiv \exists z \exists x \forall y \exists x_1 (\neg p(u, z, x) \vee (q(z, y) \wedge r(y, x_1))) && \text{(Pränexnormalform)} \end{aligned}$$

Skolemisierung $u \mapsto sk_u, z \mapsto sk_z; x \mapsto sk_x; x_1 \mapsto sk_{x_1}(y)$

$$\Rightarrow_S^* \forall y (\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee (q(sk_z, y) \wedge r(y, sk_{x_1}(y))))$$

(Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform)

Skolemnormalform mit Matrix in KNF:

$$\Rightarrow_K^* \forall y ((\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee q(sk_z, y)) \wedge (\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee r(y, sk_{x_1}(y))))$$

Klauselmenge: $N = \{ \{ \neg p(sk_u, sk_z, sk_x), q(sk_z, y) \}, \{ \neg p(sk_u, sk_z, sk_x), r(y, sk_{x_1}(y)) \} \}$

Zusammenfassung

Normalformen

- NNF
- Pränexe Normalform
- Skolemnormalform
- Klauselnormalform

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Resolution für Grundklauseln (Mengennotation)

Aussagenlogische Klauseln entsprechen Grundklauseln und umgekehrt.

Resolutionsregel:

$$\frac{C \cup \{A\} \quad \{\neg A\} \cup D}{C \cup D}$$

$C \cup D$: **Resolvente**
 A : **resolviertes Atom**

Beispielrefutation (Mengennotation)

1. $\{\neg P(f(a)), Q(b)\}$ (gegeben)
2. $\{P(f(a)), Q(b)\}$ (gegeben)
3. $\{\neg P(g(b, a)), \neg Q(b)\}$ (gegeben)
4. $\{P(g(b, a))\}$ (gegeben)
5. $\{Q(b)\}$ (Res. 2. in 1.)
6. $\{\neg P(g(b, a))\}$ (Res. 5. in 3.)
8. \perp (Res. 4. in 6.)

Resolution für Grundklauseln (Klauselnotation)

Resolutionsregel:

$$\frac{C \vee A \quad \neg A \vee D}{C \vee D}$$

$C \vee D$: **Resolvente**

A : **resolviertes Atom**

Faktorisieren:

$$\frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}$$

„ \vee “ wird in Klauseln als assoziativ und kommutativ aufgefaßt.

Beispielrefutation (Klauselnotation)

1. $\neg P(f(a)) \vee \neg P(f(a)) \vee Q(b)$ (gegeben)
2. $P(f(a)) \vee Q(b)$ (gegeben)
3. $\neg P(g(b, a)) \vee \neg Q(b)$ (gegeben)
4. $P(g(b, a))$ (gegeben)
5. $\neg P(f(a)) \vee Q(b) \vee Q(b)$ (Res. 2. in 1.)
6. $\neg P(f(a)) \vee Q(b)$ (Fakt. 5.)
7. $Q(b) \vee Q(b)$ (Res. 2. in 6.)
8. $Q(b)$ (Fakt. 7.)
9. $\neg P(g(b, a))$ (Res. 8. in 3.)
10. \perp (Res. 4. in 9.)

Korrektheit und Vollständigkeit

Aussagenlogische Resolution ist **korrekt** und **vollständig**.

- Mengennotation: Resolutionsregel
- Klauselnotation: Resolutionsregel + Faktorisieren

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \quad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt)
↳ ggf. umbenennen
- $\sigma(L) = \sigma(L')$

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \quad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt)
 \mapsto ggf. umbenennen
- $\sigma(L) = \sigma(L')$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$

Idee: Wähle die “allgemeinste” Substitution, mit $\sigma(L) = \sigma(L')$

Beispiel

$$\frac{\{p(x, f(x)), q(f(x))\} \quad \{\neg r(f(y)), \neg q(y)\}}{\{p(x, f(x))\sigma, \neg r(f(y))\sigma\}}$$

$$L = q(f(x)), L' = q(y)$$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$:

$$\sigma_1 \quad \sigma_1(x) = a, \sigma_1(y) = f(a)$$

$$\sigma_2 \quad \sigma_2(x) = f(a), \sigma_2(y) = f(f(a))$$

...

Beispiel

$$\frac{\{p(x, f(x)), q(f(x))\} \quad \{\neg r(f(y)), \neg q(y)\}}{\{p(x, f(x))\sigma, \neg r(f(y))\sigma\}}$$

$$L = q(f(x)), L' = q(y)$$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$:

$$\sigma_1 \quad \sigma_1(x) = a, \sigma_1(y) = f(a)$$

$$\sigma_1 \quad \sigma_1(x) = f(a), \sigma_1(y) = f(f(a))$$

...

Idee: Wähle die "allgemeinste" Substitution, mit $\sigma(L) = \sigma(L')$

$$q(f(x)) \stackrel{?}{=} q(y) \quad \Rightarrow \quad f(x) \stackrel{?}{=} y \quad \Rightarrow \quad y \stackrel{?}{=} f(x)$$

$$\sigma = [f(x)/y] \quad \sigma(y) = f(x), \sigma(z) = z \text{ for } z \neq y.$$

Unifikation

Sei $E = \{s_1 \stackrel{?}{=} t_1, \dots, s_n \stackrel{?}{=} t_n\}$ (s_i, t_i Terme oder Atome) eine Menge von Gleichheitsproblemen.

Definition: Eine Substitution σ heißt ein **Unifikator** von E g.d.w.

$$\forall 1 \leq i \leq n : s_i \sigma = t_i \sigma.$$

Existiert ein Unifikator, so heißt E **unifizierbar**.

Definition: σ heißt **allgemeiner** als τ

$$\sigma \leq \tau \iff \text{es gibt Subst. } \varrho : \sigma \circ \varrho = \tau$$

wobei $(\sigma \circ \varrho)(x) := \varrho(\sigma(x))$ die Komposition von σ und ϱ als Abbildungen.^a

^aIst wohldefiniert, weil $\sigma \circ \varrho$ einen endlichen Bereich hat.

Beispiel

$$E = \{q(f(x)) \stackrel{?}{=} q(y)\}$$

$\sigma_1 = [a/x, f(a)/y]$ ist ein Unifikator von E

$\sigma_2 = [f(a)/x, f(f(a))/y]$ ist ein Unifikator von E

$\sigma = [f(x)/y]$ ist ein Unifikator von E

σ ist allgemeiner als σ_1 und als σ_2 :

$$\sigma_1 = \sigma \circ [a/x]$$

$$\sigma \circ [a/x](y) = \sigma(y)[a/x] = f(x)[a/x] = f(a)$$

$$\sigma \circ [a/x](x) = \sigma(x)[a/x] = x[a/x] = a$$

$$\sigma_2 = \sigma \circ [f(a)/x]$$

$$\sigma \circ [f(a)/x](y) = \sigma(y)[f(a)/x] = f(x)[f(a)/x] = f(f(a))$$

$$\sigma \circ [f(a)/x](x) = \sigma(x)[f(a)/x] = x[f(a)/x] = f(a)$$

Ein paar simple Fakten

- Jeder Term ist mit sich selbst unifizierbar (mittels id)
- Terme der Gestalt $f(s_1, \dots, s_n)$, $f(t_1, \dots, t_n)$ sind unifizierbar g.d.w. s_i und t_i unifizierbar für $1 \leq i \leq n$
- Atome der Gestalt $p(s_1, \dots, s_n)$, $p(t_1, \dots, t_n)$ sind unifizierbar g.d.w. s_i und t_i unifizierbar für $1 \leq i \leq n$
- Terme der Gestalt $f(s_1, \dots, s_n)$, $g(t_1, \dots, t_m)$ sind niemals unifb.
- Atome der Gestalt $p(s_1, \dots, s_n)$, $q(t_1, \dots, t_n)$ sind niemals unifb.
- Eine Variable x und ein Term t , der x nicht enthält, sind immer unifb. (mittels $[t/x]$)
- Eine Variable x und ein Term $t \neq x$, der x enthält, sind niemals unifizierbar

Unifikation nach Martelli/Montanari

- (1) $t \stackrel{?}{=} t, E \Rightarrow_{MM} E$
- (2) $f(s_1, \dots, s_n) \stackrel{?}{=} f(t_1, \dots, t_n), E \Rightarrow_{MM} s_1 \stackrel{?}{=} t_1, \dots, s_n \stackrel{?}{=} t_n, E$
- (3) $f(\dots) \stackrel{?}{=} g(\dots), E \Rightarrow_{MM} \perp$
- (4) $x \stackrel{?}{=} t, E \Rightarrow_{MM} x \stackrel{?}{=} t, E[t/x]$
falls $x \in \text{var}(E), x \notin \text{var}(t)$
- (5) $x \stackrel{?}{=} t, E \Rightarrow_{MM} \perp$
falls $x \neq t, x \in \text{var}(t)$
- (6) $t \stackrel{?}{=} x, E \Rightarrow_{MM} x \stackrel{?}{=} t, E$
falls $t \notin X$

Beispiel 1

$$\{f(g(a, x), g(y, b)) \stackrel{?}{=} f(x, g(v, w)), f(x, g(v, w)) \stackrel{?}{=} f(g(x, a), g(v, b))\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \{g(a, x) \stackrel{?}{=} x, g(y, b) \stackrel{?}{=} g(v, w), x \stackrel{?}{=} g(x, a), g(v, w) \stackrel{?}{=} g(v, b)\}$$

$$\stackrel{(5)}{\Rightarrow}_{MM} \perp$$

Beispiel 2

$$\{f(g(a, x), g(y, b)) \stackrel{?}{=} g(x, g(v, w)), f(x, g(v, w)) \stackrel{?}{=} f(g(x, a), g(v, b))\}$$

$$\stackrel{(3)}{\Rightarrow} MM \quad \perp$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a, x), g(y, b)) \stackrel{?}{=} f(z, g(v, w)), f(z, g(v, w)) \stackrel{?}{=} f(g(x, a), g(v, b))\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \{g(a, x) \stackrel{?}{=} z, g(y, b) \stackrel{?}{=} g(v, w), z \stackrel{?}{=} g(x, a), g(v, w) \stackrel{?}{=} g(v, b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \{z \stackrel{?}{=} g(a, x), g(y, b) \stackrel{?}{=} g(v, w), g(a, x) \stackrel{?}{=} g(x, a), g(v, w) \stackrel{?}{=} g(v, b)\}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a, x), g(y, b)) \stackrel{?}{=} f(z, g(v, w)), f(z, g(v, w)) \stackrel{?}{=} f(g(x, a), g(v, b))\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \{g(a, x) \stackrel{?}{=} z, g(y, b) \stackrel{?}{=} g(v, w), z \stackrel{?}{=} g(x, a), g(v, w) \stackrel{?}{=} g(v, b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \{z \stackrel{?}{=} g(a, x), g(y, b) \stackrel{?}{=} g(v, w), g(a, x) \stackrel{?}{=} g(x, a), g(v, w) \stackrel{?}{=} g(v, b)\}$$

$$\Rightarrow_{MM}^* \{z \stackrel{?}{=} g(a, x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a, x), g(y, b)) \stackrel{?}{=} f(z, g(v, w)), f(z, g(v, w)) \stackrel{?}{=} f(g(x, a), g(v, b))\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \{g(a, x) \stackrel{?}{=} z, g(y, b) \stackrel{?}{=} g(v, w), z \stackrel{?}{=} g(x, a), g(v, w) \stackrel{?}{=} g(v, b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \{z \stackrel{?}{=} g(a, x), g(y, b) \stackrel{?}{=} g(v, w), g(a, x) \stackrel{?}{=} g(x, a), g(v, w) \stackrel{?}{=} g(v, b)\}$$

$$\Rightarrow_{MM}^* \{z \stackrel{?}{=} g(a, x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow_{MM}^* \{z \stackrel{?}{=} g(a, x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a, x), g(y, b)) \stackrel{?}{=} f(z, g(v, w)), f(z, g(v, w)) \stackrel{?}{=} f(g(x, a), g(v, b))\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \{g(a, x) \stackrel{?}{=} z, g(y, b) \stackrel{?}{=} g(v, w), z \stackrel{?}{=} g(x, a), g(v, w) \stackrel{?}{=} g(v, b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \{z \stackrel{?}{=} g(a, x), g(y, b) \stackrel{?}{=} g(v, w), g(a, x) \stackrel{?}{=} g(x, a), g(v, w) \stackrel{?}{=} g(v, b)\}$$

$$\Rightarrow_{MM}^* \{z \stackrel{?}{=} g(a, x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow_{MM}^* \{z \stackrel{?}{=} g(a, x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow_{MM}^* \{z \stackrel{?}{=} g(a, a), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} b, a \stackrel{?}{=} a, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow_{MM}^* \{z \stackrel{?}{=} g(a, a), y \stackrel{?}{=} v, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a, x), g(y, b)) \stackrel{?}{=} f(z, g(v, w)), f(z, g(v, w)) \stackrel{?}{=} f(g(x, a), g(v, b))\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \{g(a, x) \stackrel{?}{=} z, g(y, b) \stackrel{?}{=} g(v, w), z \stackrel{?}{=} g(x, a), g(v, w) \stackrel{?}{=} g(v, b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \{z \stackrel{?}{=} g(a, x), g(y, b) \stackrel{?}{=} g(v, w), g(a, x) \stackrel{?}{=} g(x, a), g(v, w) \stackrel{?}{=} g(v, b)\}$$

$$\Rightarrow_{MM}^* \{z \stackrel{?}{=} g(a, x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow_{MM}^* \{z \stackrel{?}{=} g(a, x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow_{MM}^* \{z \stackrel{?}{=} g(a, a), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} b, a \stackrel{?}{=} a, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow_{MM}^* \{z \stackrel{?}{=} g(a, a), y \stackrel{?}{=} v, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}$$

Allgemeinster Unifikator:

$$[g(a, a)/z, v/y, a/x, b/w]$$

Vorsicht: a, b sind Konstanten. $[g(a, a)/z, v/y, x/a, w/b]$ ist keine Substitution!

Beispiele

$$\Sigma = \{\Omega, \Pi\} \quad \Omega = \{f/2, g/2, a/0, b/0\}, \Pi = \{p/2, q/1\}$$

$$x, y, z \in X$$

$$\{p(g(x, a), g(f(x, b), y)) \stackrel{?}{=} q(g(f(x, b), y))\} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} MM \perp \quad (\text{weil } p \neq q)$$

Beispiele

$$\Sigma = \{\Omega, \Pi\} \quad \Omega = \{f/2, g/2, a/0, b/0\}, \Pi = \{p/2, q/1\}, \quad x, y, z, u \in X$$

$$\{p(g(y, a), g(f(x, b), z)) \stackrel{?}{=} p(z, g(f(g(u, y), b), u), \quad q(a) \stackrel{?}{=} q(y))\}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \{g(y, a) \stackrel{?}{=} z, \quad g(f(x, b), z) \stackrel{?}{=} g(f(g(u, y), b), u), \quad q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\} \\ &\stackrel{(6,2)}{\Rightarrow}_{MM} \{z \stackrel{?}{=} g(y, a), \quad f(x, b) \stackrel{?}{=} f(g(u, y), b), \quad z \stackrel{?}{=} u, \quad q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\} \\ &\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \{z \stackrel{?}{=} g(y, a), \quad f(x, b) \stackrel{?}{=} f(g(u, y), b), \quad g(y, a) \stackrel{?}{=} u, \quad q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\} \\ &\stackrel{(2,6)}{\Rightarrow}_{MM} \{z \stackrel{?}{=} g(y, a), \quad x \stackrel{?}{=} g(u, y), \quad b \stackrel{?}{=} b, \quad u \stackrel{?}{=} g(y, a), \quad q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\} \\ &\stackrel{(1)}{\Rightarrow}_{MM} \{z \stackrel{?}{=} g(y, a), \quad x \stackrel{?}{=} g(u, y), \quad u \stackrel{?}{=} g(y, a), \quad q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\} \\ &\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \{z \stackrel{?}{=} g(y, a), \quad x \stackrel{?}{=} g(g(y, a), y), \quad u \stackrel{?}{=} g(y, a), \quad g(a) \stackrel{?}{=} g(y)\} \\ &\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \{z \stackrel{?}{=} g(y, a), \quad x \stackrel{?}{=} g(g(y, a), y), \quad u \stackrel{?}{=} g(y, a), \quad a \stackrel{?}{=} y\} \\ &\stackrel{(6)}{\Rightarrow}_{MM} \{z \stackrel{?}{=} g(y, a), \quad x \stackrel{?}{=} g(g(y, a), y), \quad u \stackrel{?}{=} g(y, a), \quad y \stackrel{?}{=} a\} \\ &\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \{z \stackrel{?}{=} g(a, a), \quad x \stackrel{?}{=} g(g(a, a), a), \quad u \stackrel{?}{=} g(a, a), \quad y \stackrel{?}{=} a\} \end{aligned}$$

Allgemeinster Unifikator (mgu): $[g(a, a)/z, \quad g(g(a, a), a)/x, \quad g(a, a)/u, \quad a/y]$