Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 7

27.06.2019

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

Syntax

- Prädikatenlogische Signatur
- Term, Atom, Formel x

Semantik

- Prädikatenlogisches Modell
- Auswertung von Formeln in Modellen
- Erfüllbarkeit, Gültigkeit; Folgerung, Äquivalenz
- Eigenschaften von Quantoren (Vertauschbarkeit untereinander und mit $\wedge, \vee$)

Substitutionslemma

Unentschiedbarkeit der Erfüllbarkeit von Formeln

Bis jetzt

Normalformen

- NNF
- Pränexe Normalform
- Skolemnormalform
- Klauselnormalform

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt) $\mapsto$ ggf. umbenennen
- $\sigma(L) = \sigma(L')$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$
Idee: Wähle die "allgemeinste" Substitution, mit $\sigma(L) = \sigma(L')$

Unifikation

Sei $E = \{s_1 \stackrel{?}{=} t_1, \ldots, s_n \stackrel{?}{=} t_n\}$ (s_i, t_i Terme oder Atome) eine Menge von Gleichheitsproblemen.

Definition: Eine Substitution σ heißt ein Unifikator von E g.d.w.

$$\forall 1 \leq i \leq n : s_i\sigma = t_i\sigma.$$

Existiert ein Unifikator, so heißt E unifizierbar.

Definition: σ heißt allgemeiner als τ

$$\sigma \leq \tau \ :\Leftrightarrow \text{ es gibt Subst.} \varrho : \sigma \circ \varrho = \tau$$

wobei $(\sigma \circ \varrho)(x) := \varrho(\sigma(x))$ die Komposition von σ und ϱ als Abbildungen.[a]

[a] Ist wohldefiniert, weil $\sigma \circ \varrho$ einen endlichen Bereich hat.

Unifikation nach Martelli/Montanari

$$
\begin{array}{lrll}
(1) & t \stackrel{?}{=} t, E & \Rightarrow_{MM} & E \\
(2) & f(s_1, \ldots, s_n) \stackrel{?}{=} f(t_1, \ldots, t_n), E & \Rightarrow_{MM} & s_1 \stackrel{?}{=} t_1, \ldots, s_n \stackrel{?}{=} t_n, E \\
(3) & f(\ldots) \stackrel{?}{=} g(\ldots), E & \Rightarrow_{MM} & \perp \\
(4) & x \stackrel{?}{=} t, E & \Rightarrow_{MM} & x \stackrel{?}{=} t, E[t/x] \\
 & & & \text{falls } x \in var(E), x \notin var(t) \\
(5) & x \stackrel{?}{=} t, E & \Rightarrow_{MM} & \perp \\
 & & & \text{falls } x \neq t, x \in var(t) \\
(6) & t \stackrel{?}{=} x, E & \Rightarrow_{MM} & x \stackrel{?}{=} t, E \\
 & & & \text{falls } t \notin X
\end{array}
$$

Beispiel 1

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(x,g(v,w)), f(x,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} x, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), x \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(5)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \perp$$

Beispiel 2

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} g(x,g(v,w)), f(x,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b))\}$$

$$\stackrel{(3)}{\Longrightarrow}_{MM} \quad \perp$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x), g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z, g(v,w)), f(z, g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a), g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\Rightarrow^{*}_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\Rightarrow^*_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, \color{red}{v \stackrel{?}{=} v}, w \stackrel{?}{=} b\}$$

$$\Rightarrow^*_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(2)}{\Rightarrow}_{MM} && \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\} \\
&\overset{(4)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b) \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,a), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} b, a \stackrel{?}{=} a, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,a), y \stackrel{?}{=} v, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}
\end{aligned}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \overset{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \overset{?}{=} f(g(x,a),g(v,b))\}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(2)}{\Rightarrow}_{MM} && \{g(a,x) \overset{?}{=} z, g(y,b) \overset{?}{=} g(v,w), z \overset{?}{=} g(x,a), g(v,w) \overset{?}{=} g(v,b)\} \\
&\overset{(4)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \overset{?}{=} g(a,x), g(y,b) \overset{?}{=} g(v,w), g(a,x) \overset{?}{=} g(x,a), g(v,w) \overset{?}{=} g(v,b) \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \overset{?}{=} g(a,x), y \overset{?}{=} v, b \overset{?}{=} w, a \overset{?}{=} x, x \overset{?}{=} a, v \overset{?}{=} v, w \overset{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \overset{?}{=} g(a,x), y \overset{?}{=} v, b \overset{?}{=} w, a \overset{?}{=} x, x \overset{?}{=} a, w \overset{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \overset{?}{=} g(a,a), y \overset{?}{=} v, b \overset{?}{=} b, a \overset{?}{=} a, x \overset{?}{=} a, w \overset{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \overset{?}{=} g(a,a), y \overset{?}{=} v, x \overset{?}{=} a, w \overset{?}{=} b\}
\end{aligned}$$

Allgemeinster Unifikator:

$$[g(a,a)/z, v/y, a/x, b/w]$$

Vorsicht: a, b sind Konstanten. $[g(a,a)/z, v/y, x/a, w/b]$ ist keine Substitution!

Beispiele

$\Sigma = \{\Omega, \Pi\} \quad \Omega = \{f/2, g/2, a/0, b/0\}, \Pi = \{p/2, q/1\}$
$x, y, z \in X$

$$\{p(g(x,a), g(f(x,b), y)) \stackrel{?}{=} q(g(f(x,b), y))\} \quad \stackrel{(3)}{\Rightarrow}_{MM} \perp \qquad \text{(weil } p \neq q\text{)}$$

Beispiele

$\Sigma = \{\Omega, \Pi\} \quad \Omega = \{f/2, g/2, a/0, b/0\}, \Pi = \{p/2, q/1\}, \quad x, y, z, u \in X$

$\{p(g(y,a), g(f(x,b),z)) \stackrel{?}{=} p(z, g(f(g(u,y),b),u), \quad q(a) \stackrel{?}{=} q(y))\}$

$$
\begin{array}{ll}
\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} & \{g(y,a) \stackrel{?}{=} z, \ g(f(x,b),z) \stackrel{?}{=} g(f(g(u,y),b),u), \ q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\} \\
\stackrel{(6,2)}{\Rightarrow}_{MM} & \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \ f(x,b) \stackrel{?}{=} f(g(u,y),b), \ z \stackrel{?}{=} u, \ q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\} \\
\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} & \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \ f(x,b) \stackrel{?}{=} f(g(u,y),b), g(y,a) \stackrel{?}{=} u, \ q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\} \\
\stackrel{(2,6)}{\Rightarrow}_{MM} & \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \ x \stackrel{?}{=} g(u,y), b \stackrel{?}{=} b, \ u \stackrel{?}{=} g(y,a), \ q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\} \\
\stackrel{(1)}{\Rightarrow}_{MM} & \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \ x \stackrel{?}{=} g(u,y), \ u \stackrel{?}{=} g(y,a), \ q(a) \stackrel{?}{=} q(y)\} \\
\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} & \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \ x \stackrel{?}{=} g(g(y,a),y), \ u \stackrel{?}{=} g(y,a), \ g(a) \stackrel{?}{=} g(y)\} \\
\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} & \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \ x \stackrel{?}{=} g(g(y,a),y), \ u \stackrel{?}{=} g(y,a), \ a \stackrel{?}{=} y\} \\
\stackrel{(6)}{\Rightarrow}_{MM} & \{z \stackrel{?}{=} g(y,a), \ x \stackrel{?}{=} g(g(y,a),y), \ u \stackrel{?}{=} g(y,a), \ y \stackrel{?}{=} a\} \\
\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} & \{z \stackrel{?}{=} g(a,a), \ x \stackrel{?}{=} g(g(a,a),a), \ u \stackrel{?}{=} g(a,a), \ y \stackrel{?}{=} a\}
\end{array}
$$

Allgemeinster Unifikator (mgu): $[g(a,a)/z, \ g(g(a,a),a)/x, \ g(a,a)/u, \ a/y]$

Unifikation: Haupteigenschaften

Definition. Eine Substitition σ heißt idempotent, wenn $\sigma \circ \sigma = \sigma$.

Lemma.
σ ist idempotent gdw. $dom(\sigma) \cap codom(\sigma) = \emptyset$.

Theorem.

1. $E \Rightarrow^*_{MM} \perp$ gdw. E nicht unfizierbar.
2. E unifizierbar gdw. $E \Rightarrow^*_{MM} x_1 \stackrel{?}{=} u_1, \ldots, x_k \stackrel{?}{=} u_k$,
   mit x_i pw. verschieden, $x_i \notin var(u_j), 1 \leq i, j \leq k$.
3. Falls $E \Rightarrow^*_{MM} x_1 \stackrel{?}{=} u_1, \ldots, x_k \stackrel{?}{=} u_k$,
   mit x_i pw. verschieden, $x_i \notin var(u_j)$ so
   $\sigma = [u_1/x_1, \ldots, u_k/x_k]$ ist allgemeinster Unifikator von E.

Unifikation: Hauptseigenschaften

Theorem.
E unifizierbar g.d.w. es gibt allgemeinsten Unifikator σ von E, so dass:
(1) σ idempotent und
(2) $\mathit{dom}(\sigma) \cup \mathit{codom}(\sigma) \subseteq \mathit{var}(E)$.

Notation: $\sigma = \mathrm{mgu}(E)$ („most general unifier“)

Beweisideen

- Falls $E \Rightarrow_{MM} E'$, dann σ Unifikator von E gdw. σ Unifikator von E'. ($\perp$ habe keinen Unifikator.)
- Bzgl. $\Rightarrow_{MM}$ irreduzible E sind trivialerweise nicht unifizierbar ($E = \perp$) oder haben die Form einer idempotenten Substitution. In diesem Fall ist die Substitution der allgemeinste Unifikator.
- $\Rightarrow_{MM}$ "terminiert". Eine geeignete lexikographische Ordnung auf Gleichungsmengen E (mit $\perp$ minimal und kleiner als alle Gleichungsmengen) zeigt dieses. Man vergleiche in dieser Reihenfolge:
    1. Anzahl der definierten Variablen (d.h. Variablen x in Gleichung $x \stackrel{?}{=} t$ mit $x \notin var(t)$), die auch außerhalb ihrer Definition in E vorkommen
    2. Mengenordnung induziert von (i) der Größe (Anzahl der Symbole) einer Gleichung; (ii) bei gleicher Größe betrachten wir $x \stackrel{?}{=} t$ kleiner als $t \stackrel{?}{=} x$, falls $t \notin X$.
- σ ist idempotent wegen der Substitution in Regel 4. $dom(\sigma) \subseteq var(E)$, weil keine neuen Variablen eingeführt werden.

Unifikation

Problem: exponentielles Anwachsen der Terme möglich.

Beispiel:

$E = \{x_1 \stackrel{?}{=} f(x_0, x_0), x_2 \stackrel{?}{=} f(x_1, x_1), \ldots, x_n \stackrel{?}{=} f(x_{n-1}, x_{n-1})\}$

m.g.u. $[x_1 \mapsto f(x_0, x_0), x_2 \mapsto f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)), ...]$

$x_i \mapsto$ kompletter binärer Baum der Höhe i Zeit/Raum: exponentiell

Idee: Terme: azyklische Termgraphen

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt)
  $\mapsto$ ggf. umbenennen
- $\sigma = \mathrm{mgu}(L, L')$

Beispiel

$\{L\} \cup C_1 = \{\underbrace{p(a,x)}_{L}, p(x,x)\}$ $\qquad$ $\{\neg L'\} \cup C_2 = \{\neg \underbrace{p(y,y)}_{L'}\}$

Beispiel

$$\{L\} \cup C_1 = \{\underbrace{p(a,x)}_{L}, p(x,x)\} \qquad \{\neg L'\} \cup C_2 = \{\neg \underbrace{p(y,y)}_{L'}\}$$

Allgemeinster Unifikator von L, L':

$$\begin{aligned} \{p(a,x) \stackrel{?}{=} p(y,y)\} \quad &\Rightarrow_{MM} \quad \{a \stackrel{?}{=} y, x \stackrel{?}{=} y\} \\ &\Rightarrow_{MM} \quad \{y \stackrel{?}{=} a, x \stackrel{?}{=} a\} \end{aligned}$$

$\mathrm{mgu}(L, L')$: $\quad \sigma = [a/y, a/x]$

Beispiel

$\{L\} \cup C_1 = \{\underbrace{p(a, x)}_{L}, p(x, x)\}$ $\qquad$ $\{\neg L'\} \cup C_2 = \{\neg \underbrace{p(y, y)}_{L'}\}$

Allgemeinster Unifikator von L, L':

$$\begin{aligned} \{p(a, x) \stackrel{?}{=} p(y, y)\} \quad &\Rightarrow_{MM} \quad \{a \stackrel{?}{=} y, x \stackrel{?}{=} y\} \\ &\Rightarrow_{MM} \quad \{y \stackrel{?}{=} a, x \stackrel{?}{=} a\} \end{aligned}$$

mgu(L, L'): $\qquad \sigma = [a/y, a/x]$

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

$R := \{p(x, x)\}\sigma \cup \{\}\sigma = \{p(a, a)\}$

Beispiel

$$\{L\} \cup C_1 = \{\underbrace{p(a,x)}_{L}, p(x,x)\} \qquad \{\neg L'\} \cup C_2 = \{\neg \underbrace{p(y,y)}_{L'}\}$$

Allgemeinster Unifikator von L, L':

$$\begin{aligned} \{p(a,x) \stackrel{?}{=} p(y,y)\} \quad & \Rightarrow_{MM} \quad \{a \stackrel{?}{=} y, x \stackrel{?}{=} y\} \\ & \Rightarrow_{MM} \quad \{y \stackrel{?}{=} a, x \stackrel{?}{=} a\} \end{aligned}$$

$\text{mgu}(L, L')$: $\quad \sigma = [a/y, a/x]$

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

$R := \{p(x,x)\}\sigma \cup \{\}\sigma = \{p(a,a)\}$

$$\frac{\{p(a,x), p(x,x)\} \qquad \{\neg p(y,y)\}}{\{p(a,a)\}}$$

Prädikatenlogische Resolution

Resolutionsregel in dieser Form alleine unvollständig für Prädikatenlogik

Beispiel:

$\{\{p(x), p(y)\}, \{\neg p(u), \neg p(v)\}\}$

- unerfüllbar
- aber nur Resolventen der Länge 2

Prädikatenlogische Resolution

Faktorisierung

$$\frac{\{L_1, \ldots, L_n\} \cup C}{(\{L_1, \ldots, L_n\} \cup C)\sigma}$$

wobei

- σ allgemeinster Unifikator (MGU) von $\{L_1, \ldots, L_n\}$ ist

$(\{L_1, \ldots, L_n\} \cup C)\sigma$ heißt Faktor von $\{L_1, \ldots, L_n\} \cup C$

Beispiel für Faktorisierung

$$\frac{\{p(x),p(y),r(y,z)\}}{\{p(x),r(x,z)\}}$$

$\mathrm{mgu}(p(x), p(y)) = [x/y]$

Beispiel für Faktorisierung

$$\frac{\{p(x),p(y),r(y,z)\}}{\{p(x),r(x,z)\}} \qquad \mathrm{mgu}(p(x), p(y)) = [x/y]$$

$$\frac{\{p(x),p(y),p(a),r(y,z)\}}{\{p(a),r(a,z)\}} \qquad \mathrm{mgu}(p(x), p(y), p(a)) = [a/x, a/y]$$

Beispiel für Faktorisierung

$$\frac{\{p(x),p(y),r(y,z)\}}{\{p(x),r(x,z)\}} \qquad \text{mgu}(p(x), p(y)) = [x/y]$$

$$\frac{\{p(x),p(y),p(a),r(y,z)\}}{\{p(a),r(a,z)\}} \qquad \text{mgu}(p(x), p(y), p(a)) = [a/x, a/y]$$

$$\frac{\{p(b),p(y),p(a),r(y,z)\}}{\{p(b),p(a),r(b,z)\}} \qquad \text{mgu}(p(b), p(y)) = [b/y]$$

$$\frac{\{p(b),p(y),p(a),r(y,z)\}}{\{p(b),p(a),r(a,z)\}} \qquad \text{mgu}(p(y), p(a)) = [a/y]$$

Resolutionskalkül *Res* für allgemeine Klauseln (Mengennotation)

$$\frac{C \cup \{A_1\} \qquad D \cup \{\neg A_2\}}{(C \cup D)\sigma} \quad \text{falls } \sigma = \mathrm{mgu}(A_1, A_2) \qquad \text{[Resolution]}$$

$$\frac{C \cup \{L_1, L_2\}}{(C \cup \{L_1\})\sigma} \quad \text{falls } \sigma = \mathrm{mgu}(L_1, L_2) \qquad \text{[Faktorisierung]}$$

Es wird immer implizit angenommen, dass die Variablen in einer der beiden Prämissen der Resolutionsregel ggfs. (bijektiv) umbenannt werden, so dass sie disjunkt mit denen der anderen Prämisse sind.

Dieses implizite Umbenennen werden wir nicht formalisieren.

Welche Variablennamen man verwendet ist egal.

Beispielsweise könnte man sich vorstellen, dass am Anfang alle Klauseln paarweise variablendisjunkt sind und das Unifikatoren so gewählt werden, dass in ihrem Wertebereich nur neue Variablen vorkommen.

Beispiel

1.	$\{P(x), P(f(x)), \neg Q(x)\}$	[Gegeben]
2.	$\{\neg P(y)\}$	[Gegeben]
3.	$\{P(g(x', x)), Q(x)\}$	[Gegeben]

Beispiel

1.	$\{P(x), P(f(x)), \neg Q(x)\}$	[Gegeben]
2.	$\{\neg P(y)\}$	[Gegeben]
3.	$\{P(g(x', x'')), Q(x'')\}$	[Gegeben; Bereinigt]
4.	$\{P(f(x)), \neg Q(x)\}$	[Res. 1, 2], $\mathrm{mgu}(P(x), P(y)) = [x/y]$
5.	$\{\neg Q(x)\}$	[Res. 4, 2], $\mathrm{mgu}(P(y), P(f(x))) = [f(x)/y]$
6.	$\{Q(x'')\}$	[Res. 3, 2], $\mathrm{mgu}(P(y), P(g(x', x''))) = [g(x', x'')/y$
7.	$\perp$	[Res. 5, 6], $\mathrm{mgu}(Q(x), Q(x'')) = [x/x'']$

Resolutionskalkül *Res* für allgemeine Klauseln (Klauselnotation)

$$\frac{C \vee A_1 \qquad D \vee \neg A_2}{(C \vee D)\sigma} \quad \text{falls } \sigma = \mathrm{mgu}(A_1, A_2) \qquad \text{[Resolution]}$$

$$\frac{C \vee L_1 \vee L_2}{(C \vee L_1)\sigma} \quad \text{falls } \sigma = \mathrm{mgu}(L_1, L_2) \qquad \text{[Faktorisierung]}$$

Es wird immer implizit angenommen, dass die Variablen in einer der beiden Prämissen der Resolutionsregel ggfs. (bijektiv) umbenannt werden, so dass sie disjunkt mit denen der anderen Prämisse sind.

Dieses implizite Umbenennen werden wir nicht formalisieren.

Welche Variablennamen man verwendet ist egal.

Beispielsweise könnte man sich vorstellen, dass am Anfang alle Klauseln paarweise variablendisjunkt sind und das Unifikatoren so gewählt werden, dass in ihrem Wertebereich nur neue Variablen vorkommen.

Beispiel

1.	$P(x) \vee P(f(x)) \vee \neg Q(x)$	[Gegeben]
2.	$\neg P(y)$	[Gegeben]
3.	$P(g(x', x)) \vee Q(x)$	[Gegeben]

Beispiel

1.	$P(x) \vee P(f(x)) \vee \neg Q(x)$	[Gegeben]
2.	$\neg P(y)$	[Gegeben]
3.	$P(g(x', x'')) \vee Q(x'')$	[Gegeben; Bereinigt]
4.	$P(f(x)) \vee \neg Q(x)$	[Res. 1, 2], $\mathrm{mgu}(P(x), P(y)) = [x/y]$
5.	$\neg Q(x)$	[Res. 4, 2], $\mathrm{mgu}(P(y), P(f(x))) = [f(x)/y]$
6.	$Q(x'')$	[Res. 3, 2], $\mathrm{mgu}(P(y), P(g(x', x''))) = [g(x', x'')/y]$
7.	$\perp$	[Res. 5, 6], $\mathrm{mgu}(Q(x), Q(x'')) = [x/x'']$

Wichtig: Häufige Fehlerquellen

- Das Bereinigen (Umbenennen) nicht vergessen!
- Das Faktorisierungen (falls möglich) nicht vergessen!
- Selbstresolution ist möglich!

Notation

Sei N eine Klauselmenge und

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(N) = N \cup \{R \mid R & \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } N \\ & \text{ oder Resultat der Faktorisierung einer Klausel aus } N\}\end{aligned}$$

$\mathrm{Res}^0(N) = N$

$\mathrm{Res}^{n+1}(N) = \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^n(N))$

$\mathrm{Res}^\star(N) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}^n(N)$

(bezeichnet die Vereinigung der Ergebnisse aus aller möglichen Resolutions- und Faktorisierungsschritte auf N)

Resolution: Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Korrektheit)
Für eine Menge N von Klauseln gilt: Falls $\perp \in \mathsf{Res}^*(N)$, so N unerfüllbar.

Beweis (Idee): Wie bei Aussagenlogik.

Theorem (Vollständigkeit)
Für eine Menge N von Klauseln gilt: Falls N unerfüllbar, so $\perp \in \mathsf{Res}^*(N)$.

Idee: Reduktion auf Vollständigkeit der Resolution für Grundklauseln (also Aussagenlogischer Resolution).

$\mapsto$ Herbrandinterpretationen

Details: nächste Vorlesung