Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 9

4.07.2019

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

Ziel: Kalküle zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit (für Formeln und/oder Formelmengen)

- Normalformen, Skolemisierung

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Jetzt

Ziel: Kalküle zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit (für Formeln und/oder Formelmengen)

- Normalformen, Skolemisierung

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Beweis durch Fallunterscheidung
- Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Nachteile

- Mehr als eine Regel

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$F \wedge G$	F	G
$\neg(F \vee G)$	$\neg F$	$\neg G$
$\neg(F \rightarrow G)$	F	$\neg G$
$\neg\neg F$	F	

Formeltypen

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(F \wedge G)$
- $F \vee G$
- $F \rightarrow G$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

β	β_1	β_2
$\neg(F \wedge G)$	$\neg F$	$\neg G$
$F \vee G$	F	G
$F \rightarrow G$	$\neg F$	G

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{array}}$$

Konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

Disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\phi \\ \neg\phi\end{array}}{\perp}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c} \phi \\ \neg\phi \\ | \\ \perp \end{array}$$

Instanzen der α und β-Regel

Instanzen der α-Regel

$$\frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\begin{array}{c} \neg P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \to Q)}{\begin{array}{c} P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der β-Regel

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q} \qquad \frac{P \to Q}{\neg P \mid Q}$$

Zusätzlich: Prädikatenlogische Formeltypen

universell		existentiell	
γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall x F$	$F[t/x]$	$\exists x F$	$F[t/x]$
$\neg\exists x F$	$\neg F[t/x]$	$\neg\forall x F$	$\neg F[t/x]$

Zusätzlich: Prädikatenlogische Tableauregeln

γ-Regel

$$\frac{\gamma}{\gamma(t)} \qquad \text{universell} \qquad \begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(t) \end{array}$$

wobei t ein beliebiger Term ist.

δ-Regel

$$\frac{\delta}{\delta(f(y_1,\ldots,y_n))} \qquad \text{existentiell} \qquad \begin{array}{c} \exists x p(x, y_1, \ldots, y_n) \\ | \\ p(f(y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n) \end{array}$$

wobei f eine *neue* Skolemfunktion ist, und $y_1, \ldots, y_n$ die freien Variablen in δ sind.

Skolemisierung ist also ein Bestandteil des Kalküls und wird nicht als ein Vorverarbeitungsschritt vorausgesetzt. Aber natürlich könnte man ebensogut vorher Skolemisieren, was auch Vorteile haben kann.

Instanzen der γ und δ-Regel

Instanzen der γ-Regel

$$\frac{\forall x F(x)}{F(t)} \qquad \frac{\neg\exists x F(x)}{\neg F(t)}$$

wobei t ein beliebiger Term ist.

Instanzen der δ-Regel

$$\frac{\exists x F(x, y_1, \dots, y_n)}{F(f(y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n)} \qquad \frac{\neg\forall x F(x, y_1, \dots, y_n)}{\neg F(f(y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n)}$$

wobei f eine *neue* Skolemfunktion ist und $y_1, \dots, y_n$ die freien Variablen in $\exists x F(x, y_1, \dots, y_n)$ (resp. $\forall x F(x, y_1, \dots, y_n)$) sind.

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch (wie in Aussagenlogik)

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch (wie in Aussagenlogik)

γ-Regel

- hochgradig nicht-deterministisch
- muss für Vollständigkeit mehrfach angewendet werden (pro Ast)
- Grund für Nicht-Terminierung

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch (wie in Aussagenlogik)

γ-Regel

- hochgradig nicht-deterministisch
- muss für Vollständigkeit mehrfach angewendet werden (pro Ast)
- Grund für Nicht-Terminierung

δ-Regel

- nicht-deterministisch
- muss dennoch nur einmal pro Ast und Formel angewendet werden

Beispiel

1. $\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$

Beispiel

1. $\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$
2. $\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w))$ $\quad 1_1 \; [\alpha]$
3. $\neg \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)$ $\quad 1_2 \; [\alpha]$

Beispiel

1. $\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$
2. $\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w))$ $\quad 1_1 \; [\alpha]$
3. $\neg \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)$ $\quad 1_2 \; [\alpha]$
4. $\forall x \; p(x, a, f(x, a))$ $\quad 2(a) \; [\delta]$
5. $\neg \forall x \exists y \; p(x, a, y)$ $\quad 3(a) \; [\gamma]$

Question: How to choose the terms in the γ-rule?

Beispiel

1.	$\neg[\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w))$	1_1 $[\alpha]$
3.	$\neg\exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)$	1_2 $[\alpha]$
4.	$\forall x\ p(x, a, f(x, a))$	$2(a)$ $[\delta]$
5.	$\neg\forall x \exists y\ p(x, a, y)$	$3(a)$ $[\gamma]$
6.	$\neg\exists y\ p(b, a, y)$	$5(b)$ $[\delta]$

Question: How to choose the terms in the γ-rule?

Beispiel

1.	$\neg[\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w)) \to \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w))$	1_1 $[\alpha]$
3.	$\neg \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)$	1_2 $[\alpha]$
4.	$\forall x\ p(x, a, f(x, a))$	$2(a)$ $[\delta]$
5.	$\neg \forall x \exists y\ p(x, a, y)$	$3(a)$ $[\gamma]$
6.	$\neg \exists y\ p(b, a, y)$	$5(b)$ $[\delta]$
7.	$p(b, a, f(b, a))$	$4(b)$ $[\gamma]$
8.	$\neg p(b, a, f(b, a))$	$6(f(b, a))$ $[\gamma]$

closed

Question: How to choose the terms in the γ-rule?

Beispiel

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, $\Omega = \{f/1\}$, $\Pi = \{p/2,\ q/1\}$, X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$.

Sei F die folgende prädikatenlogische Formel in der Signatur Σ:

$$\Big(\ \exists x\ \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)\Big)\ \wedge\ \Big(\neg\big(\exists x \big(p(x, f(x))\big) \wedge \exists x\ q(x)\big)\ \Big)$$

Zu zeigen: F unerfüllbar

Beispiel

1. $\Big(\exists x \, \forall y \big(p(x,y) \land q(x) \big) \Big) \land \Big(\neg \big(\exists x \, (p(x, f(x))) \land \exists x \; q(x) \big) \Big)$

Beispiel

1. $\Big(\exists x \, \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x) \big) \Big) \;\wedge\; \Big(\neg \big(\exists x \big(p(x, f(x)) \big) \wedge \exists x \; q(x) \big) \Big)$
2. $\exists x \, \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x) \big) \Big)$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg \big(\exists x \big(p(x, f(x)) \big) \wedge \exists x \; q(x) \big)$ $[1_2, \alpha]$

Beispiel

1. $\Big(\exists x \, \forall y \big(p(x,y) \land q(x) \big) \Big) \;\land\; \Big(\neg \big(\exists x \, (p(x, f(x))) \land \exists x \; q(x) \big) \Big)$
2. $\exists x \, \forall y \Big(p(x,y) \land q(x) \Big) \Big)$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg \Big(\exists x \, (p(x, f(x))) \land \exists x \; q(x) \Big)$ $[1_2, \alpha]$
4. $\forall y \Big(p(sk_x, y) \land q(sk_x) \Big) \Big)$ $[2, \delta]$

Beispiel

1. $\Big(\exists x\ \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)\Big) \ \wedge\ \Big(\neg\big(\exists x \left(p(x, f(x))\right) \wedge \exists x\ q(x)\big)\ \Big)$
2. $\exists x\ \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)\Big)$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg\big(\exists x \left(p(x, f(x))\right) \wedge \exists x\ q(x)\big)$ $[1_2, \alpha]$
4. $\forall y \big(p(sk_x, y) \wedge q(sk_x)\big)\Big)$ $[2, \delta]$

$/$ $\backslash$

5. $\neg\exists x \left(p(x, f(x))\right)[3_1, \beta]$

6. $\neg\exists x q(x)[3_2, \beta]$

Beispiel

1. $\Big(\exists x\, \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)\Big) \;\wedge\; \Big(\neg\big(\exists x\,(p(x,f(x))) \wedge \exists x\; q(x)\big)\Big)$
2. $\exists x\, \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)\big)$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg\big(\exists x\,(p(x,f(x))) \wedge \exists x\; q(x)\big)$ $[1_2, \alpha]$
4. $\forall y \big(p(sk_x, y) \wedge q(sk_x)\big)\big)$ $[2, \delta]$

/ \

5. $\neg\exists x\,(p(x,f(x)))\,[3_1, \beta]$ 6. $\neg\exists x q(x)[3_2, \beta]$

7. $\neg p(sk_x, f(sk_x))$ $[5, \gamma]$ 11. $\neg q(sk_x)$ $[6, \gamma]$

Question: How to choose the terms in the γ-rule?

Beispiel

$$1.\quad \Big(\exists x\, \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)\Big) \wedge \Big(\neg\big(\exists x (p(x, f(x))) \wedge \exists x\, q(x)\big)\Big)$$

$$2.\quad \exists x\, \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)\Big) \qquad [1_1, \alpha]$$

$$3.\quad \neg\big(\exists x (p(x, f(x))) \wedge \exists x\, q(x)\big) \qquad [1_2, \alpha]$$

$$4.\quad \forall y \big(p(sk_x, y) \wedge q(sk_x)\big)\Big) \qquad [2, \delta]$$

/ \

$5.\ \neg\exists x\big(p(x, f(x))\big)$ $[3_1, \beta]$	$6.\neg\exists x q(x)$ $[3_2, \beta]$
$7.\neg p(sk_x, f(sk_x))$ $[5, \gamma]$	$11.\neg q(sk_x)$ $[6, \gamma]$
$8. p(sk_x, f(sk_x)) \wedge q(sk_x)$ $[4, \gamma]$	$12. p(sk_x, f(sk_x)) \wedge q(sk_x)$ $[4, \gamma]$

Question: How to choose the terms in the γ-rule?

Beispiel

$$
\begin{array}{lll}
1. & \Big(\exists x\, \forall y \big(p(x,y) \land q(x)\big)\Big) \;\land\; \Big(\neg\big(\exists x\,(p(x,f(x))) \land \exists x\; q(x)\big)\Big) & \\
2. & \exists x\, \forall y \big(p(x,y) \land q(x)\big)\Big) & [1_1, \alpha] \\
3. & \neg\big(\exists x\,(p(x,f(x))) \land \exists x\; q(x)\big) & [1_2, \alpha] \\
4. & \forall y \big(p(sk_x, y) \land q(sk_x)\big)\Big) & [2, \delta]
\end{array}
$$

$$/ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \backslash$$

5. $\neg\exists x\big(p(x,f(x))\big)$	$[3_1, \beta]$	6. $\neg\exists x q(x)$	$[3_2, \beta]$
7. $\neg p(sk_x, f(sk_x))$	$[5, \gamma]$	11. $\neg q(sk_x)$	$[6, \gamma]$
8. $p(sk_x, f(sk_x)) \land q(sk_x)$	$[4, \gamma]$	12. $p(sk_x, f(sk_x)) \land q(sk_x)$	$[4, \gamma]$
9. $p(sk_x, f(sk_x))$	$[8_1, \alpha]$	13. $p(sk_x, f(sk_x))$	$[12_1, \alpha]$
10. $q(sk_x)$	$[8_2, \alpha]$	14. $q(sk_x)$	$[12_2, \alpha]$

Question: How to choose the terms in the γ-rule?

Beispiel

1. $\Big(\exists x \, \forall y \big(p(x,y) \land q(x) \big) \Big) \; \land \; \Big(\neg \big(\exists x \, (p(x, f(x))) \land \exists x \; q(x) \big) \Big)$
2. $\exists x \; \forall y \big(p(x,y) \land q(x) \big) \big)$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg \big(\exists x \, (p(x, f(x))) \land \exists x \; q(x) \big)$ $[1_2, \alpha]$
4. $\forall y \big(p(sk_x, y) \land q(sk_x) \big) \big)$ $[2, \delta]$

/ \

5. $\neg \exists x \big(p(x, f(x)) \big)$	$[3_1, \beta]$	6. $\neg \exists x q(x)$	$[3_2, \beta]$
7. $\neg p(sk_x, f(sk_x))$	$[5, \gamma]$	11. $\neg q(sk_x)$	$[6, \gamma]$
8. $p(sk_x, f(sk_x)) \land q(sk_x)$	$[4, \gamma]$	12. $p(sk_x, f(sk_x)) \land q(sk_x)$	$[4, \gamma]$
9. $p(sk_x, f(sk_x))$	$[8_1, \alpha]$	13. $p(sk_x, f(sk_x))$	$[12_1, \alpha]$
10. $q(sk_x)$	$[8_2, \alpha]$	14. $q(sk_x)$	$[12_2, \alpha]$
$\perp$		$\perp$	

Question: How to choose the terms in the γ-rule?

Wahl der Terme in der γ-Regel

Problem: Es ist sehr schwierig, zu “raten”, welche Instanzen im Beweis nützlich sind.

Idee:

- Substitutionsregel auf Unifikatoren komplementärer Formeln beschränken!
- γ-Regel führen nur freien Variablen ein (Tableaus mit freien Variablen)
  Freie Variablen (Dummies, Platzhalten) werden 'bei Bedarf' (bei Abschluss) instantiiert (wie bei Resolution).

Wir sprechen von einem AMGU-Tableau, wenn die Substitutionsregel nur für Substitutionen σ angewendet wird, für die es einen Pfad in T mit *Literalen* $\neg A$ und B gibt, so daß $\sigma = \mathrm{mgu}(A, B)$.

Tableaus mit freien Variablen

Semantische Tableaux mit freien Variablen

Neue γ-Regel

$$\frac{\gamma}{\gamma(y)}$$ universell

$$\begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(y) \end{array}$$

wobei y eine neue freie Variable ist

Neue Abschlussregel

$$\frac{\begin{array}{c} L_1 \\ \neg L_2 \end{array}}{\perp}$$ Widerspruch

$$\frac{\begin{array}{c} p(y) \\ \neg p(a) \end{array}}{\perp}$$ mgu: $[a/y]$

wobei L_1, L_2 unifizierbare Literale.

Tableaus mit freien Variablen

Semantische Tableaux mit freien Variablen

Neue γ-Regel

$$\frac{\gamma}{\gamma(y)}$$ universell

$$\begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(y) \end{array}$$

wobei y eine neue freie Variable ist

Neue Abschlussregel

$$\begin{array}{c} L_1 \\ \\ \neg L_2 \\ \hline \bot \end{array}$$ Widerspruch

$$\begin{array}{c} p(y) \\ \neg p(a) \\ \hline \bot \end{array} \qquad \text{mgu: } [a/y]$$

wobei L_1, L_2 unifizierbare Literale.

Nota bene: Allgemeinster Unifikator von L_1, L_2 wird auf das ganze Tableau angewendet.

Beispiel 1: Tableau mit freien Variablen

1. $\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$

Beispiel 1: Tableau mit freien Variablen

1.	$\neg[\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w)) \to \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w))$	$[1_1, \alpha]$
3.	$\neg \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)$	$[1_2, \alpha]$

Beispiel 1: Tableau mit freien Variablen

1.	$\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w))$	$[1_1, \alpha]$
3.	$\neg \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)$	$[1_2, \alpha]$
4.	$\forall x \; p(x, a, f(x, a))$	$[2(a), \delta]$

Beispiel 1: Tableau mit freien Variablen

1.	$\neg[\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w))$	$[1_1, \alpha]$
3.	$\neg \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)$	$[1_2, \alpha]$
4.	$\forall x\ p(x, a, f(x, a))$	$[2(a), \delta]$
5.	$\neg \forall x \exists y\ p(x, v_1, y)$	$[3(v_1), \gamma]$

Beispiel 1: Tableau mit freien Variablen

1.	$\neg[\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w))$	$[1_1, \alpha]$
3.	$\neg \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)$	$[1_2, \alpha]$
4.	$\forall x\ p(x, a, f(x, a))$	$[2(a), \delta]$
5.	$\neg \forall x \exists y\ p(x, v_1, y)$	$[3(v_1), \gamma]$
6.	$\neg \exists y\ p(b(v_1), v_1, y)$	$[5(b(v_1)), \delta]$

Beispiel 1: Tableau mit freien Variablen

1.	$\neg[\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w))$	$[1_1, \alpha]$
3.	$\neg \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)$	$[1_2, \alpha]$
4.	$\forall x\ p(x, a, f(x, a))$	$[2(a), \delta]$
5.	$\neg \forall x \exists y\ p(x, v_1, y)$	$[3(v_1), \gamma]$
6.	$\neg \exists y\ p(b(v_1), v_1, y)$	$[5(b(v_1)), \delta]$
7.	$p(v_2, a, f(v_2, a))$	$[4(v_2), \gamma]$

Beispiel 1: Tableau mit freien Variablen

1.	$\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w))$	$[1_1, \alpha]$
3.	$\neg \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)$	$[1_2, \alpha]$
4.	$\forall x \; p(x, a, f(x, a))$	$[2(a), \delta]$
5.	$\neg \forall x \exists y \; p(x, v_1, y)$	$[3(v_1), \gamma]$
6.	$\neg \exists y \; p(b(v_1), v_1, y)$	$[5(b(v_1)), \delta]$
7.	$p(v_2, a, f(v_2, a))$	$[4(v_2), \gamma]$
8.	$\neg p(b(v_1), v_1, v_3)$	$[6(v_3), \gamma]$

7. und 8. sind (modulo Unifikation) komplementär:

$$v_2 \stackrel{?}{=} b(v_1), \;\; a \stackrel{?}{=} v_1, \;\; f(v_2, a) \stackrel{?}{=} v_3$$

ist lösbar mit mgu $\sigma = [a/v_1, b(a)/v_2, f(b(a), a)/v_3]$ und somit ist $T\sigma$ ein geschlossenes (lineares) Tableau für Formel 1.

Beispiel 2: Tableau mit freien Variablen

1.	$(\exists x \forall y (p(x,y) \wedge q(x))) \wedge (\neg(\exists x (p(x, f(x))) \wedge \exists x q(x)))$	
2.	$\exists x \forall y (p(x,y) \wedge q(x))$	$[1_1, \alpha]$
3.	$\neg(\exists x (p(x, f(x))) \wedge \exists x q(x))$	$[1_2, \alpha]$
4.	$\forall y (p(sk_X, y) \wedge q(sk_X))$	$[2_1, \delta]$
5.	$p(sk_X, y_1) \wedge q(sk_X)$	$[4_1, \gamma]$
6.	$p(sk_X, y_1)$	$[5_1, \alpha]$
7.	$q(sk_X)$	$[5_2, \alpha]$

8.	$\neg(\exists x (p(x, f(x)))$	$[3_1, \beta]$	9.	$\neg \exists x q(x)$	$[3_2, \beta]$
10.	$\neg p(x_1, f(x_1))$	$[8_1, \gamma]$	11.	$\neg q(x_2)$	$[9_1, \gamma]$
	$\bot$			$\bot$	

$\{p(sk_x, y_1) \stackrel{?}{=} p(x_1, f(x_1), \;\; q(sk_x) \stackrel{?}{=} q(x_2)\} \Rightarrow^{*}_{MM} \{x_1 \stackrel{?}{=} sk_x, \;\; y_1 \stackrel{?}{=} f(sk_x), \;\; x_2 \stackrel{?}{=} sk_x\}$

$\sigma = [sk_x/x_1, f(sk_x)/y, sk_x/x_2]$ wird auf das ganze Tableau angewendet

$\mapsto$ Schluss beider Äste.

Formale Definition des Kalküls

Fast wie in der Aussagenlogik definiert (kleine Änderungen)

(Definition auf den folgenden Seiten).

Formale Definition des Kalküls

Definition

Tableau: Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Definition

Tableauast: Maximaler Pfad in einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Definition: Tableau

Sei $M = \{F_1, \ldots, F_n\}$ eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M, die kein Literal ist
- T' entstehe durch Erweiterung von B gemäßder auf F anwendbaren Regel (α, β, γ oder δ)

Dann ist T' ein Tableau für M.

Substitutionsregel

- Ist T ein Tableau für M und
- ist σ eine Substitution,

so ist auch $T\sigma$ ein Tableau für M.

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Definition.
Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn

$$F, \neg F \in B$$

Definition.
Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist.

Definition.
Ein Tableau für M, das geschlossen ist, ist ein Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M

Bemerkungen

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Die Substitutionsregel ändert potentiell alle Formeln des Tableau.
Das ist das Globale an der Beweismethode.

Nimmt man die Substitutionsregel wörtlich, so zählt man, in Verbindung mit der γ-Regel, alle Substitutionsinstanzen allquantifizierter Formeln auf, ein Rückschritt im Vergleich zur Resolution.
Das braucht man aber nicht.

Tableaus mit freien Variablen

Semantische Tableaux mit freien Variablen

Neue γ-Regel

$$\frac{\gamma}{\gamma(y)}$$

universell

$$\begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(y) \end{array}$$

wobei y eine neue freie Variable ist

Neue Abschlussregel

$$\frac{\begin{array}{c} L_1 \\ \\ \neg L_2 \end{array}}{\perp}$$

Widerspruch

$$\frac{\begin{array}{c} p(y) \\ \neg p(a) \end{array}}{\perp}$$

mgu: $[a/y]$

wobei L_1, L_2 unifizierbare Literale.

Nota bene: Allgemeinster Unifikator von L_1, L_2 wird auf das ganze Tableau angewendet.

Konvention

Wir nehmen an, dass die Menge der Variablen X in 2 disjunkte unendliche Teilmengen X_f und X_g partitioniert ist, und dass:

- Für gebundene Variablen nur solche aus X_g verwendet werden.
  (Vermeidet das Einfangproblem bei Substitution.)
- Die Variabeln, die durch die neue γ-Regel eingeführt werden immer aus Menge X_f gewählt sind.

Beispiel

$$
\begin{array}{lcr}
1. & (\exists x \forall y (p(x,y) \wedge q(x))) \wedge (\neg(\exists x(p(x,f(x))) \wedge \exists x q(x))) & \\
 & | & \\
2. & \exists x \forall y (p(x,y) \wedge q(x)) & [1_1, \alpha] \\
 & | & \\
3. & \neg(\exists x(p(x,f(x))) \wedge \exists x q(x)) & [1_2, \alpha] \\
 & | & \\
4. & \forall y (p(sk_X, y) \wedge q(sk_X)) & [2_1, \delta] \\
 & | & \\
5. & p(sk_X, y_1) \wedge q(sk_X) & [4_1, \gamma] \\
 & | & \\
6. & p(sk_X, y_1) & [5_1, \alpha] \\
 & | & \\
7. & q(sk_X) & [5_2, \alpha]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccllccr}
8. & \neg(\exists x(p(x,f(x)))) & & [3_1, \beta] & 9. & \neg \exists x q(x) & & [3_2, \beta] \\
 & | & & & & | & & \\
10. & \neg p(x_1, f(x_1)) & & [8_1, \gamma] & 11. & \neg q(x_2) & & [9_1, \gamma] \\
 & | & & & & | & & \\
 & \bot & & & & \bot & &
\end{array}
$$

$\{p(sk_x, y_1) \stackrel{?}{=} p(x_1, f(x_1), \;\; q(sk_x) \stackrel{?}{=} q(x_2)\} \Rightarrow^*_{MM} \{x_1 \stackrel{?}{=} sk_x, \; y_1 \stackrel{?}{=} f(sk_x), \; x_2 \stackrel{?}{=} sk_x\}$

$\sigma = [sk_x/x_1, f(sk_x)/y, sk_x/x_2]$ wird auf das ganze Tableau augewendet

$\mapsto$ Schluss beider Äste.

Prädikatenlogische Klauseltableaux

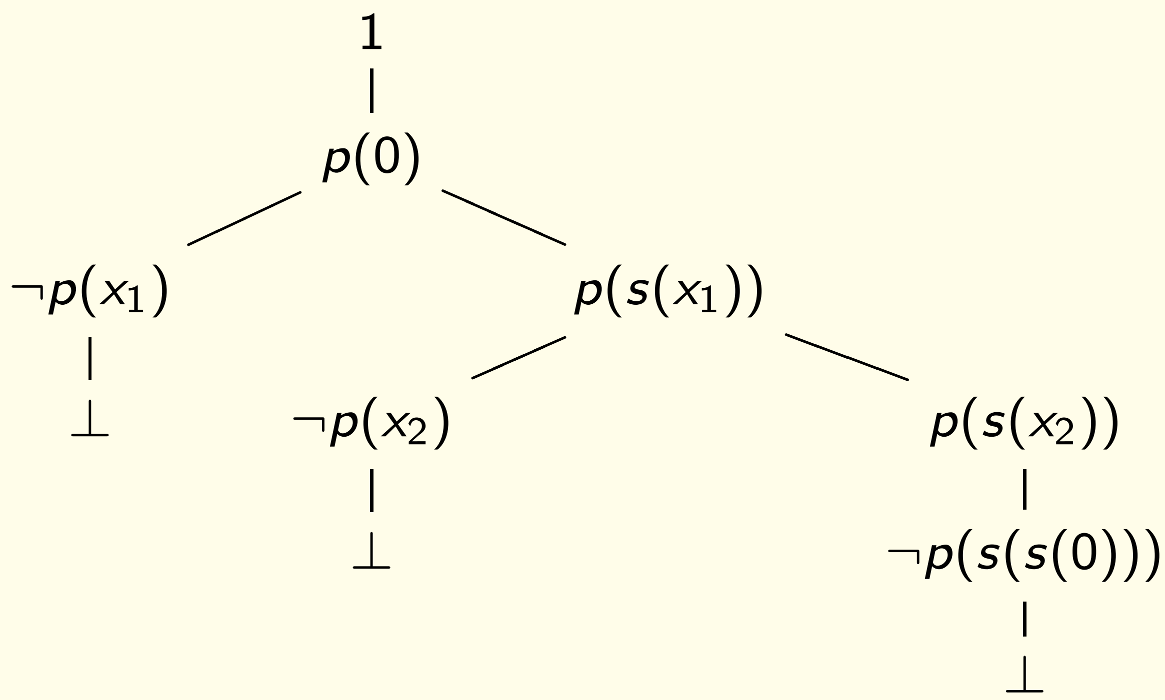
Klauseltableaux für eine Klauselmenge S

- Abschlussregel wie zuvor
- Keine α, keine δ-Regel
- β- und γ-Regel zusammengefasst:
  - Sei B ein Ast in T
  - Sei $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ eine Klausel in S
  - Sei $C' = C\sigma = \{L'_1, \ldots, L'_n\}$ aus C durch Variablenumbenennung

  Dann kann B erweitert werden, indem n Blätter mit $L'_1, \ldots, L'_n$ angehängt werden.

Beispiel

$S = \{\{p(0)\}, \ \{\neg p(x), p(s(x))\}, \ \{\ \neg p(s(s(0)))\ \}\ \}$



$\{p(0) \stackrel{?}{=} p(x_1), p(x_2) \stackrel{?}{=} p(s(x_1)), p(s(x_2)) \stackrel{?}{=} p(s(s(0)))\}$

mgu: $\sigma = [0/x_1, s(0)/x_2] \mapsto$ Schluss aller Äste.

Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt.

Korrektheit

Bei gegebener Signatur Σ bezeichnen wir mit Σ^{sko} das Ergebnis der Hinzunahme unendlich vieler neuer Skolemfunktionen zu Σ, die wir in der δ-Regel verwenden dürfen.

Sei $\mathcal{A}$ eine Σ^{sko}-Interpretation, T ein Tableau, und β eine Variablenbelegung über $\mathcal{A}$.

Definition. T heißt $(\mathcal{A}, \beta)$-erfüllt, wenn es einen Pfad P_β in T gibt, so dass $\mathcal{A}, \beta \models F$, für jede Formel F auf P_β.

Definition. T heißt erfüllbar, falls es ein $\mathcal{A}$ gibt, so dass für jede Variablenbelegung β das Tableau T $(\mathcal{A}, \beta)$-erfüllt ist. (D.h. wir dürfen P_β in Abhängigkeit von β wählen.)

Korrektheit

Sei $M = \{F_1, \dots, F_n\}$ eine Formelmenge (so dass F_i keine freien Variablen enthält).

Theorem
Sei T ein Tableau für $\{F_1, \dots, F_n\}$.
$\{F_1, \dots, F_n\}$ erfüllbar genau dann, wenn T erfüllbar.

Beweis:

"$\Leftarrow$": Falls T erfüllbar, so gibt es eine Struktur $\mathcal{A}$, so dass für jede Variablenbelegung β das Tableau T $(\mathcal{A}, \beta)$-erfüllt ist,

d.h. es gibt einen Pfad P_β in T, so dass $\mathcal{A}, \beta \models F$, für jede Formel F auf P_β.

Dann ist aber leicht zu sehen, dass $\mathcal{A}, \beta \models M$ (Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M).

Korrektheit

Sei $M = \{F_1, \dots, F_n\}$ eine Formelmenge (so dass F_i keine freien Variablen enthält).

Theorem
Sei T ein Tableau für $\{F_1, \dots, F_n\}$.
$\{F_1, \dots, F_n\}$ erfüllbar genau dann, wenn T erfüllbar.

Beweis von " $\Rightarrow$ " durch Induktion über die Tiefe von T.

Tableau mit Tiefe 1 (mit einem Knoten) erfüllbar wenn $\{F_1, \dots, F_n\}$ erfüllbar.

Induktionsvoraussetzung: Implikation gilt für alle Tableaux mit Tiefe $\leq n$.

Induktionsschritt: Sei T ein Tableau mit Tiefe $n+1$. T entsteht durch eine Erweiterung mit einer α, β, γ oder δ-Regel aus einem Tableau mit Tiefe $\leq n$.

α/β-Regeln: Beweis wie für Aussagenlogik; γ-Regel: Offensichtlich.
Bei δ müssen die Ideen aus dem Beweis der Bewahrung von Erfüllbarkeit bei Skolemisierung verwendet werden.

Striktheitbedingung

Definition. Ein Tableau ist strikt, falls für jede Formel F die entsprechende Erweiterungsregel höchstens einmal auf jeden Ast, der die Formel enthält, angewandt wurde.

Striktheitsbedingung für γ unvollständig

$$
\begin{array}{lcr}
1. & \neg[\forall x\ p(x) \rightarrow (p(a) \wedge p(b))] & \\
2. & \forall x\ p(x) & [1_1, \alpha] \\
3. & \neg(p(a) \wedge p(b)) & [1_2, \alpha] \\
4. & p(v_1) & [2(v_1), \gamma]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
5. & \neg p(a) & [3_1, \beta] & 6. & \neg p(b) & [3_2, \beta]
\end{array}
$$

Würde die Striktheitsbedingung für γ gelten, wäre das Tableau nur noch durch Anwendung der Substitutionsregel weiter expandierbar. Aber es gibt keine Substitution (für v_1), unter der beide Pfade gleichzeitig abgeschlossen werden können.

Mehrfachanwendung von γ löst das Problem

1. $\neg[\forall x\ p(x) \rightarrow (p(a) \wedge p(b))]$
2. $\forall x\ p(x)$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg(p(a) \wedge p(b))$ $[1_2, \alpha]$
4. $p(v_1)$ $[2_{v_1}, \alpha]$

5. $\neg p(a)$ $[3_1, \beta]$

6. $\neg p(b)$ $[3_2, \beta]$
7. $p(v_2)$ $[2_{v_2}, \gamma]$

Der Punkt ist, dass die verschiedenen Anwendungen von γ auf $\forall x\ p(x)$ jeweils neue freie Variablen für x einsetzen dürfen.

Jetzt liefert zweifache Anwendung der AMGU-Regel die Substitution $[a/v_1, b/v_2]$ und somit ein geschlossenes Tableau.

Wie oft muss γ angewendet werden?

Theorem

Es gibt keine berechenbare Funktion $f : For_\Sigma \times For_\Sigma \to \mathbb{N}$, so dass, falls eine Satzform F unerfüllbar, es ein geschlossenes Tableau für F gibt, wobei für Formeln $\forall x G$, die in T vorkommen, die γ-Regel auf jedem Pfad, auf dem $\forall x G$ vorkommt, höchstens $f(F, \forall x G)$-mal angewendet worden ist.

Sonst wäre Unerfüllbarkeit bzw. Gültigkeit in Logik erster Stufe entscheidbar, weil man nur Tableaux in einer Tiefe aufzählen müsste, die durch f beschränkt wird. Daher sind Tableaux mit freien Variablen i.allg. notwendigerweise unbeschränkt in ihrer Tiefe.

$\forall$ wirkt wie eine unendliche Konjunktion. Durch iteratives Anwenden von γ, in Verbindung mit der Substitutionsregel, können alle Instanzen $F[t/x]$ aufgezählt und untereinander, also konjunktiv, in jedem Pfad durch $\forall x F$ eingesetzt werden.

Vollständigkeit

Theorem

$\{F_1, \ldots, F_n\}$ erfüllbar genau dann, wenn es kein geschlossenes, striktes (mit Ausnahme von γ) AMGU-Tableau für $\{F_1, \ldots, F_n\}$ gibt.

Beweis (Idee, Klauseltableaux)

Zum Beweis definiert man einen fairen Tableaux-Expansionsprozess, der gegen ein unendliches Tableau konvergiert, wo auf jedem Pfad jede γ-Formel in alle Varianten (modulo Wahl der freien Variablen) expandiert wurde. Man kann dann wieder zeigen, dass alle Pfade bis auf Redundanz unter Resolution saturiert sind. Hierzu verwendet man die Lifting-Argumente für Resolutionsinferenzen, um die AMGU-Einschränkung als vollständig zu beweisen.

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

- Vollständigkeit der Tableauregeln garantiert nur Existenz eines geschlossenen Tableaus.
- Eine systematische Beweissuchprozedur ist notwendig, um einen Beweis zu finden.

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

- Vollständigkeit der Tableauregeln garantiert nur Existenz eines geschlossenen Tableaus.
- Eine systematische Beweissuchprozedur ist notwendig, um einen Beweis zu finden.

Tableaukonstruktion ist nicht-deterministisch: Choice points

- Nächster zu betrachtender Ast?
- Abschluss- oder Erweiterung?
- Falls Abschluss: Mit welchem Literal-Paar?
- Falls Erweiterung: Mit welcher Formel?

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Harmlos: Astauswahl

Beliebige Strategie (z.B. links nach rechts) führt zum Erfolg

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Harmlos: Astauswahl

Beliebige Strategie (z.B. links nach rechts) führt zum Erfolg

Mit Fairnessstrategie handhabbar: Formelauswahl

Jede Formel auf jedem Ast, γ-Formeln beliebig oft

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Harmlos: Astauswahl

Beliebige Strategie (z.B. links nach rechts) führt zum Erfolg

Mit Fairnessstrategie handhabbar: Formelauswahl

Jede Formel auf jedem Ast, γ-Formeln beliebig oft

Kritisch: Abschluss erfordert Backtracking

Alternativ: Keinen Abschluss machen, bis sich alle Äste zugleich schließen lassen

Beispiel

Unfaire Bevorzugung einer Formel

$$
\begin{array}{c}
\forall x p(x) \\
| \\
q \wedge \neg q \\
| \\
p(X_1) \\
| \\
p(X_2) \\
\ldots
\end{array}
$$

Beispiel

Bevorzugung eines Abschlusses

$$p(0)$$

$$\forall x(p(x) \to p(s(x)))$$

$$\neg p(s(s(0)))$$

$$p(X_1) \to p(s(X_1))$$

$$\neg p(X_1) \qquad\qquad p(s(X_1))$$

$$\bot \qquad\qquad p(X_2) \to p(s(X_2))$$

(mgu: $[0/X_1]$) $\qquad \neg p(X_2) \qquad p(s(X_2))$

$$\bot \qquad\qquad \ldots$$

(mgu: $[0/X_2]$)

Beispiel

Abschluss statt Erweiterung

$$p(a)$$

$$\forall x((p(b) \wedge p(c) \to p(x)) \to \neg(q(x) \to (q(b) \vee q(c))))$$

$$\neg q(d)$$

$$((p(b) \wedge p(c) \to p(X)) \to \neg(q(X) \to (q(b) \vee q(c))))$$

$$\neg(p(b) \wedge p(c) \to p(X)) \qquad \neg(q(X) \to (q(b) \vee q(c)$$

$$p(b) \wedge p(c) \qquad q(X)$$

$$\neg p(X) \qquad \neg(q(b) \vee q(c))$$

Semantische Tableaux

- Zu zeigen: F (un)erfüllbar

- Zu zeigen: F allgemeingültig

- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$

Semantische Tableaux

- Zu zeigen: F unerfüllbar

  Bilde geschlossenes Tableau für F.

- Zu zeigen: F allgemeingültig

- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$

Semantische Tableaux

- Zu zeigen: F unerfüllbar

  Bilde geschlossenes Tableau für F.

- Zu zeigen: F allgemeingültig

  Zeige, dass $\neg F$ unerfüllbar

- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$

Semantische Tableaux

- Zu zeigen: F unerfüllbar

  Bilde geschlossenes Tableau für F.

- Zu zeigen: F allgemeingültig

  Zeige, dass $\neg F$ unerfüllbar

- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$

  Zeige, dass $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg F$ unerfüllbar

Zusammenfassung

Prädikatenlogische Tableaukalküle

- γ- und δ-Regel
- Determinismus der Regeln
- Tableaux mit freien Variablen
  neue γ- und neue Abschlussregel
- Prädikatenlogische Klauseltableaux
- Beweissuchprozedur