Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 9

11.07.2019

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Semantische Tableaux

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$F \wedge G$	F	G
$\neg(F \vee G)$	$\neg F$	$\neg G$
$\neg(F \rightarrow G)$	F	$\neg G$
$\neg\neg F$	F	

Formeltypen

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(F \wedge G)$
- $F \vee G$
- $F \rightarrow G$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

β	β_1	β_2
$\neg(F \wedge G)$	$\neg F$	$\neg G$
$F \vee G$	F	G
$F \rightarrow G$	$\neg F$	G

Formeltypen

universell		existentiell	
γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall x F$	$F[t/x]$	$\exists x F$	$F[t/x]$
$\neg\exists x F$	$\neg F[t/x]$	$\neg\forall x F$	$\neg F[t/x]$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

Konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \quad | \quad \beta_2}$$

Disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\phi\\ \neg\phi\end{array}}{\perp}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c} \phi \\ \neg\phi \\ | \\ \perp \end{array}$$

Tableaus mit freien Variablen

Semantische Tableaux mit freien Variablen

Neue γ-Regel

$$\frac{\gamma}{\gamma(y)}$$ universell

$$\begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(y) \end{array}$$

wobei y eine neue freie Variable ist

Neue Abschlussregel

$$\begin{array}{c} L_1 \\ \\ \neg L_2 \\ \hline \bot \end{array}$$ Widerspruch

$$\begin{array}{c} p(y) \\ \neg p(a) \\ \hline \bot \end{array} \quad \text{mgu: } [a/y]$$

wobei L_1, L_2 unifizierbare Literale.

Nota bene: Allgemeinster Unifikator von L_1, L_2 wird auf das ganze Tableau angewendet.

Prädikatenlogische Klauseltableaux

Klauseltableaux für eine Klauselmenge S

- Abschlussregel wie zuvor
- Keine α, keine δ-Regel
- β- und γ-Regel zusammengefasst:
  - Sei B ein Ast in T
  - Sei $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ eine Klausel in S
  - Sei $C' = C\sigma = \{L'_1, \ldots, L'_n\}$ aus C durch Variablenumbenennung

  Dann kann B erweitert werden, indem n Blätter mit $L'_1, \ldots, L'_n$ angehängt werden.

Formale Definition des Kalküls

Definition

Tableau: Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Definition

Tableauast: Maximaler Pfad in einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Definition: Tableau

Sei $M = \{F_1, \ldots, F_n\}$ eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M, die kein Literal ist
- T' entstehe durch Erweiterung von B gemäßder auf F anwendbaren Regel (α, β, γ oder δ)

Dann ist T' ein Tableau für M.

Substitutionsregel

- Ist T ein Tableau für M und
- ist σ eine Substitution,

so ist auch $T\sigma$ ein Tableau für M.

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Definition.

Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn

$$F, \neg F \in B$$

Definition.

Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist.

Definition.

Ein Tableau für M, das geschlossen ist, ist ein Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M

Bemerkungen

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Die Substitutionsregel ändert potentiell alle Formeln des Tableau.
Das ist das Globale an der Beweismethode.

Nimmt man die Substitutionsregel wörtlich, so zählt man, in Verbindung mit der γ-Regel, alle Substitutionsinstanzen allquantifizierter Formeln auf, ein Rückschritt im Vergleich zur Resolution.
Das braucht man aber nicht.

Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt.

Korrektheit

Sei $M = \{F_1, \dots, F_n\}$ eine Formelmenge (so dass F_i keine freien Variablen enthält).

Theorem

Sei T ein Tableau für $\{F_1, \dots, F_n\}$.

$\{F_1, \dots, F_n\}$ erfüllbar genau dann, wenn T erfüllbar.

Beweis von " $\Rightarrow$ " durch Induktion über die Tiefe von T.

(letzte Vorlesung)

Striktheitbedingung

Definition. Ein Tableau ist strikt, falls für jede Formel F die entsprechende Erweiterungsregel höchstens einmal auf jeden Ast, der die Formel enthält, angewandt wurde.

Striktheitsbedingung für γ unvollständig

$$\begin{array}{lcr}
1. & \neg[\forall x\; p(x) \rightarrow (p(a) \wedge p(b))] & \\
2. & \forall x\; p(x) & [1_1, \alpha] \\
3. & \neg(p(a) \wedge p(b)) & [1_2, \alpha] \\
4. & p(v_1) & [2(v_1), \gamma]
\end{array}$$

$$5. \quad \neg p(a) \quad [3_1, \beta] \qquad\qquad 6. \quad \neg p(b) \quad [3_2, \beta]$$

Würde die Striktheitsbedingung für γ gelten, wäre das Tableau nur noch durch Anwendung der Substitutionsregel weiter expandierbar. Aber es gibt keine Substitution (für v_1), unter der beide Pfade gleichzeitig abgeschlossen werden können.

Mehrfachanwendung von γ löst das Problem

1. $\neg[\forall x\ p(x) \rightarrow (p(a) \wedge p(b))]$
2. $\forall x\ p(x)$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg(p(a) \wedge p(b))$ $[1_2, \alpha]$
4. $p(v_1)$ $[2_{v_1}, \alpha]$
5. $\neg p(a)$ $[3_1, \beta]$
6. $\neg p(b)$ $[3_2, \beta]$
7. $p(v_2)$ $[2_{v_2}, \gamma]$

Der Punkt ist, dass die verschiedenen Anwendungen von γ auf $\forall x\ p(x)$ jeweils neue freie Variablen für x einsetzen dürfen.

Jetzt liefert zweifache Anwendung der AMGU-Regel die Substitution $[a/v_1, b/v_2]$ und somit ein geschlossenes Tableau.

Wie oft muss γ angewendet werden?

Theorem

Es gibt keine berechenbare Funktion $f : For_\Sigma \times For_\Sigma \to \mathbb{N}$, so dass, falls eine Satzform F unerfüllbar, es ein geschlossenes Tableau für F gibt, wobei für Formeln $\forall x G$, die in T vorkommen, die γ-Regel auf jedem Pfad, auf dem $\forall x G$ vorkommt, höchstens $f(F, \forall x G)$-mal angewendet worden ist.

Sonst wäre Unerfüllbarkeit bzw. Gültigkeit in Logik erster Stufe entscheidbar, weil man nur Tableaux in einer Tiefe aufzählen müsste, die durch f beschränkt wird. Daher sind Tableaux mit freien Variablen i.allg. notwendigerweise unbeschränkt in ihrer Tiefe.

$\forall$ wirkt wie eine unendliche Konjunktion. Durch iteratives Anwenden von γ, in Verbindung mit der Substitutionsregel, können alle Instanzen $F[t/x]$ aufgezählt und untereinander, also konjunktiv, in jedem Pfad durch $\forall x F$ eingesetzt werden.

Vollständigkeit

Theorem
$\{F_1, \ldots, F_n\}$ erfüllbar genau dann, wenn es kein geschlossenes, striktes (mit Ausnahme von γ) AMGU-Tableau für $\{F_1, \ldots, F_n\}$ gibt.

Beweis (Idee, Klauseltableaux)
Zum Beweis definiert man einen fairen Tableaux-Expansionsprozess, der gegen ein unendliches Tableau konvergiert, wo auf jedem Pfad jede γ-Formel in alle Varianten (modulo Wahl der freien Variablen) expandiert wurde. Man kann dann wieder zeigen, dass alle Pfade bis auf Redundanz unter Resolution saturiert sind. Hierzu verwendet man die Lifting-Argumente für Resolutionsinferenzen, um die AMGU-Einschränkung als vollständig zu beweisen.

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

- Vollständigkeit der Tableauregeln garantiert nur Existenz eines geschlossenen Tableaus.
- Eine systematische Beweissuchprozedur ist notwendig, um einen Beweis zu finden.

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

- Vollständigkeit der Tableauregeln garantiert nur Existenz eines geschlossenen Tableaus.
- Eine systematische Beweissuchprozedur ist notwendig, um einen Beweis zu finden.

Tableaukonstruktion ist nicht-deterministisch: Choice points

- Nächster zu betrachtender Ast?
- Abschluss- oder Erweiterung?
- Falls Abschluss: Mit welchem Literal-Paar?
- Falls Erweiterung: Mit welcher Formel?

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Harmlos: Astauswahl

Beliebige Strategie (z.B. links nach rechts) führt zum Erfolg

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Harmlos: Astauswahl

Beliebige Strategie (z.B. links nach rechts) führt zum Erfolg

Mit Fairnessstrategie handhabbar: Formelauswahl

Jede Formel auf jedem Ast, γ-Formeln beliebig oft

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Harmlos: Astauswahl

Beliebige Strategie (z.B. links nach rechts) führt zum Erfolg

Mit Fairnessstrategie handhabbar: Formelauswahl

Jede Formel auf jedem Ast, γ-Formeln beliebig oft

Kritisch: Abschluss erfordert Backtracking

Alternativ: Keinen Abschluss machen, bis sich alle Äste zugleich schließen lassen

Beispiel

Unfaire Bevorzugung einer Formel

$$\forall x p(x)$$

$$|$$

$$q \wedge \neg q$$

$$|$$

$$p(X_1)$$

$$|$$

$$p(X_2)$$

$$\dots$$

Beispiel

Bevorzugung eines Abschlusses

$$
\begin{array}{ccc}
 & p(0) & \\
 & | & \\
 & \forall x(p(x) \to p(s(x))) & \\
 & | & \\
 & \neg p(s(s(0))) & \\
 & | & \\
 & p(X_1) \to p(s(X_1)) & \\
\neg p(X_1) & & p(s(X_1)) \\
| & & | \\
\bot & & p(X_2) \to p(s(X_2)) \\
 & & | \\
(\text{mgu: } [0/X_1]) & \neg p(X_2) & p(s(X_2)) \\
 & | & \\
 & \bot & \ldots \\
 & & \\
 & (\text{mgu: } [0/X_2]) &
\end{array}
$$

Beispiel

Abschluss statt Erweiterung

$$p(a)$$

$$\forall x((p(b) \land p(c) \to p(x)) \to \neg(q(x) \to (q(b) \lor q(c))))$$

$$\neg q(d)$$

$$((p(b) \land p(c) \to p(X)) \to \neg(q(X) \to (q(b) \lor q(c))))$$

$$\neg(p(b) \land p(c) \to p(X)) \qquad \neg(q(X) \to (q(b) \lor q(c)$$

$$p(b) \land p(c) \qquad q(X)$$

$$\neg p(X) \qquad \neg(q(b) \lor q(c))$$

Semantische Tableaux

- Zu zeigen: F (un)erfüllbar

- Zu zeigen: F allgemeingültig

- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$

Semantische Tableaux

- Zu zeigen: F unerfüllbar

  Bilde geschlossenes Tableau für F.

- Zu zeigen: F allgemeingültig

- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$

Semantische Tableaux

- Zu zeigen: F unerfüllbar

  Bilde geschlossenes Tableau für F.

- Zu zeigen: F allgemeingültig

  Zeige, dass $\neg F$ unerfüllbar

- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$

Semantische Tableaux

- Zu zeigen: F unerfüllbar

  Bilde geschlossenes Tableau für F.

- Zu zeigen: F allgemeingültig

  Zeige, dass $\neg F$ unerfüllbar

- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$

  Zeige, dass $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg F$ unerfüllbar

Zusammenfassung

Prädikatenlogische Tableaukalküle

- γ- und δ-Regel
- Determinismus der Regeln
- Tableaux mit freien Variablen
  neue γ- und neue Abschlussregel
- Prädikatenlogische Klauseltableaux
- Beweissuchprozedur