

Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 1

22.04.2021

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- Grundlegende Beweisstrategien
- Induktion über die natürlichen Zahlen / Fehlerquellen
- Strukturelle Induktion

Bis jetzt

- Grundlegende Beweisstrategien
- Induktion über die natürlichen Zahlen / Fehlerquellen
- Strukturelle Induktion

Jetzt: Aussagenlogik

- Beispiele

Beispiel: Logisches Puzzle

Lediglich eine dieser drei Personen sagt die Wahrheit, die anderen beiden lügen. Kannst du anhand ihrer Aussagen herausfinden, wer die Wahrheit sagt?

A: Ich lüge nicht.

B: A lügt.

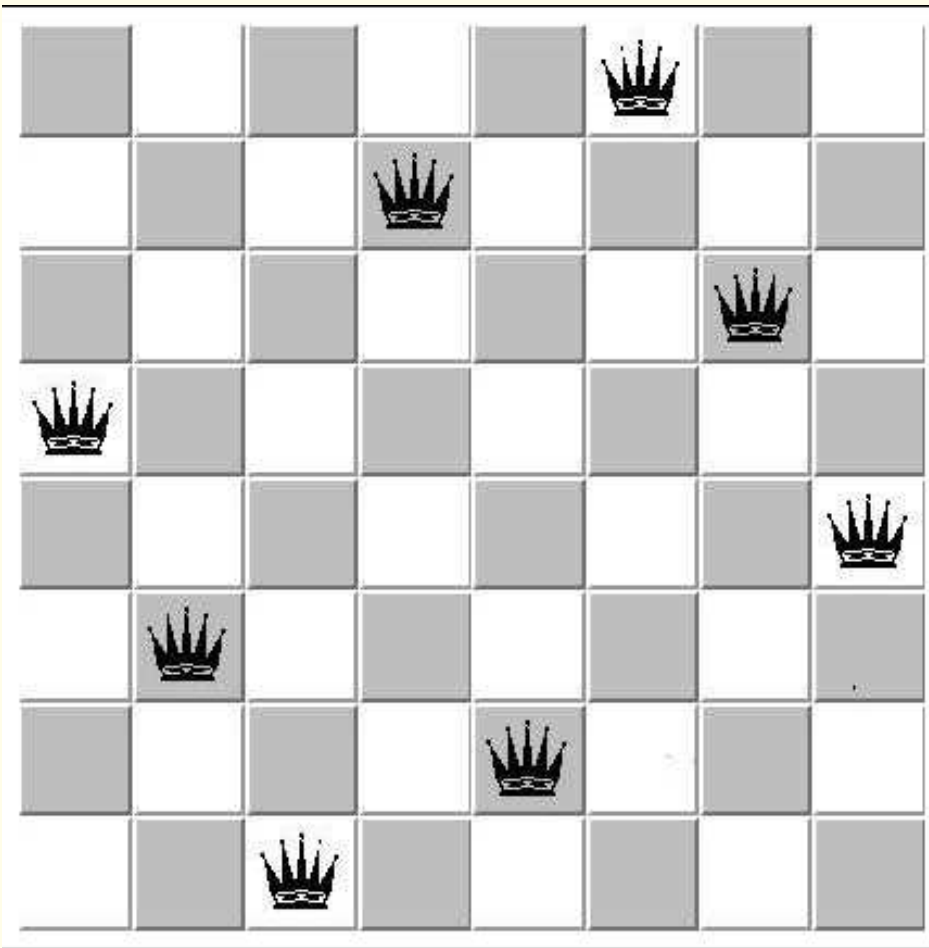
C: B lügt.

Beispiel: Das 8-Damen Problem

Man platziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.

Beispiel: Das 8-Damen Problem

Man platziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.



Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beschreibung des Problems

Für jedes Feld des Schachbretts eine aussagenlogische Variable

$$D_{ij}$$

Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beschreibung des Problems

Für jedes Feld des Schachbretts eine aussagenlogische Variable

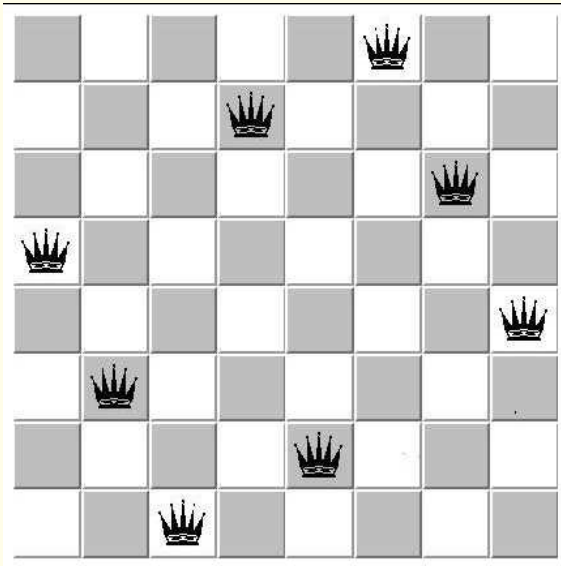
$$D_{ij}$$

Mit der Vorstellung, dass D_{ij} den Wert wahr hat, wenn auf dem Feld (i, j) eine Dame steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen

Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.



Einschränkungen pro Feld: F_{ij}

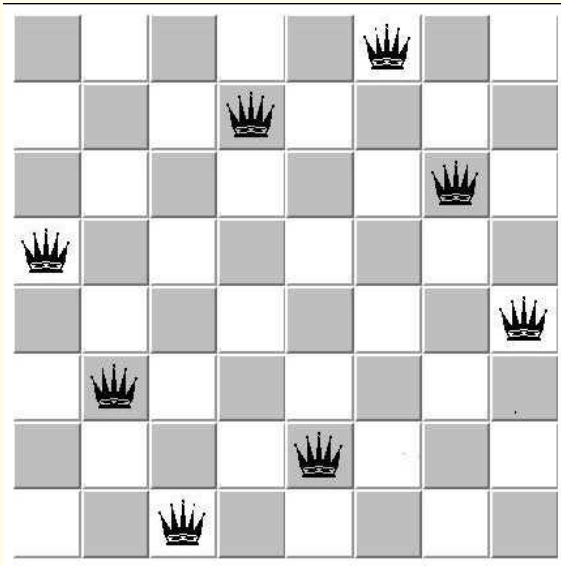
Falls auf dem Feld (5, 7) eine Dame steht:

- keine andere Dame auf Feld
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (5,8)
- keine andere Dame auf Feld
(1,7), (2,7), (3,7), (4,7), (6,7), (7,7), (8,7)
- keine andere Dame auf Feld (6,8), (4,6), (3,5), (2,4), (1,3)
- keine andere Dame auf Feld (4,8), (6,6), (7,5), (8,4)

(ähnliche Bedingungen für alle Felder (i, j)).

Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.



Einschränkungen pro Feld: F_{ij}

Falls auf dem Feld (5, 7) eine Dame steht:

- keine andere Dame auf Feld
(5,8), (5,6), (5,5), (5,4), (5,3), (5,2), (5,1)

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$$

- keine andere Dame auf Feld
(1,7), (2,7), (3,7), (4,7), (6,7), (7,7), (8,7)

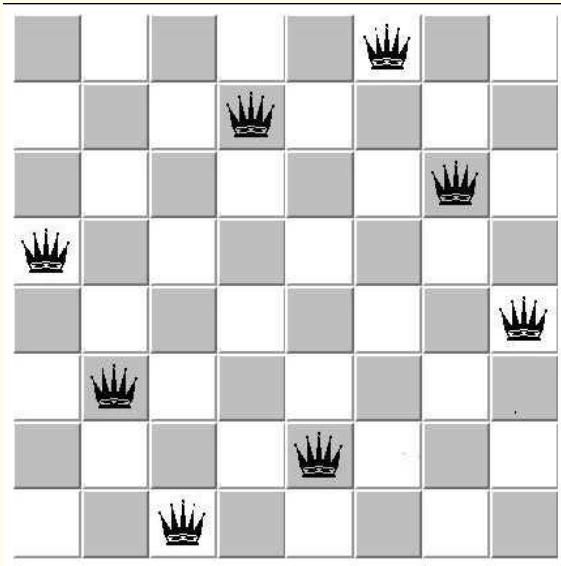
- keine andere Dame auf Feld (6,8), (4,6), (3,5), (2,4), (1,3)

- keine andere Dame auf Feld (4,8), (6,6), (7,5), (8,4)

(ähnliche Bedingungen für alle Felder (i, j)).

Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.



Einschränkungen pro Feld: F_{ij}

Falls auf dem Feld (5, 7) eine Dame steht:

- keine andere Dame auf Feld
(5,8), (5,6), (5,5), (5,4), (5,3), (5,2), (5,1)

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{56} \wedge \neg D_{55} \wedge \neg D_{54} \wedge \neg D_{53} \wedge \neg D_{52} \wedge \neg D_{51}$$

- keine andere Dame auf Feld
(1,7), (2,7), (3,7), (4,7), (6,7), (7,7), (8,7)

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{17} \wedge \neg D_{27} \wedge \neg D_{37} \wedge \neg D_{47} \wedge \neg D_{67} \wedge \neg D_{77} \wedge \neg D_{87}$$

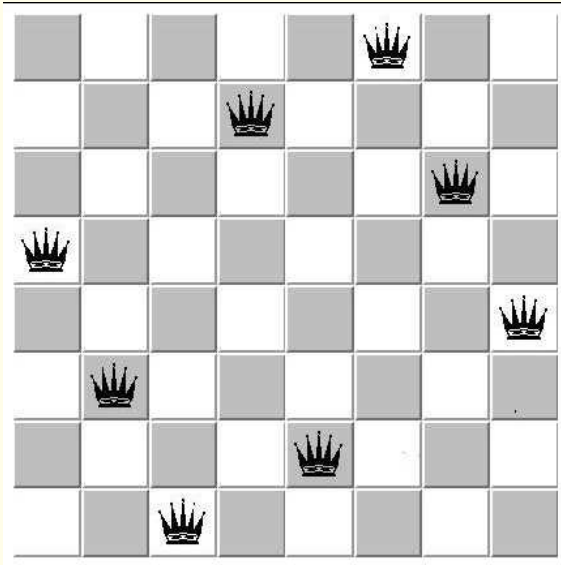
- keine andere Dame auf Feld (6,8), (4,6), (3,5), (2,4), (1,3)

- keine andere Dame auf Feld (4,8), (6,6), (7,5), (8,4)

(ähnliche Bedingungen für alle Felder (i, j)).

Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.



Einschränkungen pro Feld: F_{ij}

Falls auf dem Feld (5, 7) eine Dame steht:

- keine andere Dame auf Feld
(5,8), (5,6), (5,5), (5,4), (5,3), (5,2), (5,1)

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{56} \wedge \neg D_{55} \wedge \neg D_{54} \wedge \neg D_{53} \wedge \neg D_{52} \wedge \neg D_{51}$$

- keine andere Dame auf Feld
(1,7), (2,7), (3,7), (4,7), (6,7), (7,7), (8,7)

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{17} \wedge \neg D_{27} \wedge \neg D_{37} \wedge \neg D_{47} \wedge \neg D_{67} \wedge \neg D_{77} \wedge \neg D_{87}$$

- keine andere Dame auf Feld (6,8), (4,6), (3,5), (2,4), (1,3)

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{68} \wedge \neg D_{46} \wedge \neg D_{35} \wedge \neg D_{24} \wedge \neg D_{13}$$

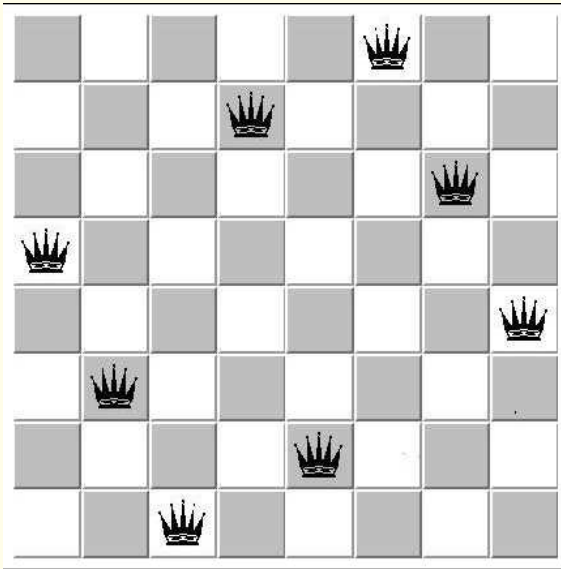
- keine andere Dame auf Feld (4,8), (6,6), (7,5), (8,4)

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{48} \wedge \neg D_{66} \wedge \neg D_{75} \wedge \neg D_{84}$$

(ähnliche Bedingungen für alle Felder (i, j)).

Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.



Einschränkungen pro Feld: F_{ij}

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$$

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{17} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{8,7}$$

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{68} \wedge \neg D_{4,6} \wedge \neg D_{3,5} \wedge \neg D_{2,4} \wedge \neg D_{1,3}$$

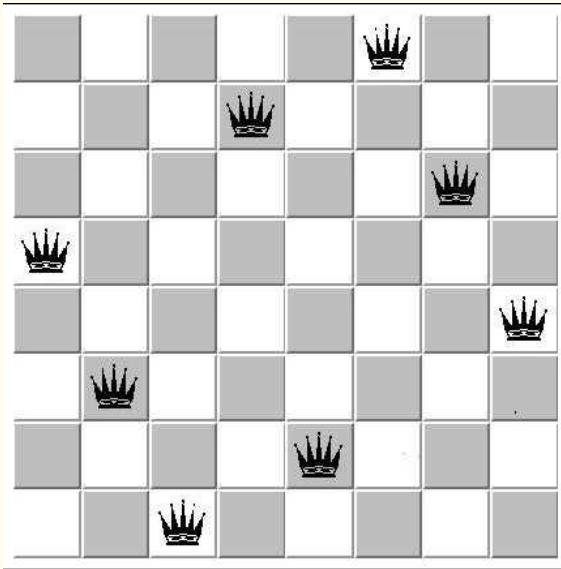
$$D_{57} \rightarrow \neg D_{48} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,5} \wedge \neg D_{8,4}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{F_{57}}$$

(ähnliche Bedingungen F_{ij} für alle Felder (i, j)).

Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.



Einschränkungen pro Feld: F_{ij}

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$$

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{17} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{8,7}$$

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{68} \wedge \neg D_{4,6} \wedge \neg D_{3,5} \wedge \neg D_{2,4} \wedge \neg D_{1,3}$$

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{48} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,5} \wedge \neg D_{8,4}$$

F_{57}

Globale Einschränkungen

Für jedes k mit $1 \leq k \leq 8$:

$$R_k := D_{1,k} \vee D_{2,k} \vee D_{3,k} \vee D_{4,k} \vee D_{5,k} \vee D_{6,k} \vee D_{7,k} \vee D_{8,k}$$

Beispiel: Das 8-Damen Problem

Struktur: Wahrheitswerte für die atomaren Aussagen D_{ij}

Modell für F_{ij} (R_k): Wahrheitswerte für die atomaren Aussagen D_{ij} so dass F_{ij} wahr (bzw. R_k wahr).

Lösung des 8-Damen Problems:

Eine aussagenlogische Struktur beschreibt eine Lösung des 8-Damen-Problems genau dann, wenn sie ein Modell der Formeln

- F_{ij} für alle $1 \leq i, j \leq 8$
- R_k für alle $1 \leq k \leq 8$

ist.

Formale Logik

- **Syntax**

welche Formeln?

- **Semantik**

Modelle (Strukturen)

Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?

- **Deduktionsmechanismus**

Ableitung neuer wahrer Formeln

Aussagenlogik

Die Welt besteht aus Fakten die **wahr** oder **falsch** sein können.

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

\top Symbol für die Formel “wahr” (Formel, die immer wahr ist)

\perp Symbol für die Formel “falsch” (Formel, die immer falsch ist)

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

\top Symbol für die Formel “wahr”

\perp Symbol für die Formel “falsch”

\neg Negationssymbol (“nicht”)

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

\top Symbol für die Formel “wahr”

\perp Symbol für die Formel “falsch”

\neg Negationssymbol (“nicht”)

\wedge Konjunktionssymbol (“und”)

\vee Disjunktionssymbol (“oder”)

\rightarrow Implikationssymbol (“wenn . . . dann”)

\leftrightarrow Symbol für Äquivalenz (“genau dann, wenn”)

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

\top Symbol für die Formel “wahr”

\perp Symbol für die Formel “falsch”

\neg Negationssymbol (“nicht”)

\wedge Konjunktionssymbol (“und”)

\vee Disjunktionssymbol (“oder”)

\rightarrow Implikationssymbol (“wenn . . . dann”)

\leftrightarrow Symbol für Äquivalenz (“genau dann, wenn”)

() die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Pi = \{P_0, \dots, P_n\}$$

oder

$$\Pi = \{P_0, P_1, \dots\}$$

Vokabular der Aussagenlogik

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Pi = \{P_0, \dots, P_n\}$$

oder

$$\Pi = \{P_0, P_1, \dots\}$$

Bezeichnungen für Symbole in Π

- atomare Aussagen
- Atome
- Aussagenvariablen

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge For_Π der Formeln über Π :

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \text{For}_\Pi$ und $\perp \in \text{For}_\Pi$

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge For_Π der Formeln über Π :

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \text{For}_\Pi$ und $\perp \in \text{For}_\Pi$
- $\Pi \subseteq \text{For}_\Pi$

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge For_Π der Formeln über Π :

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \text{For}_\Pi$ und $\perp \in \text{For}_\Pi$
- $\Pi \subseteq \text{For}_\Pi$
- Wenn $F, G \in \text{For}_\Pi$, dann auch

$$\neg F, (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$$

Elemente von For_Π .

Aussagenformeln

For_Π Menge der Formeln über Π :

F, G, H	$::=$	\perp	(Falsum)
		\top	(Verum)
		$P, P \in \Pi$	(atomare Formel)
		$\neg F$	(Negation)
		$(F \wedge G)$	(Konjunktion)
		$(F \vee G)$	(Disjunktion)
		$(F \rightarrow G)$	(Implikation)
		$(F \leftrightarrow G)$	(Äquivalenz)

Konventionen zur Notation

- Klammereinsparungen werden nach folgenden Regeln vorgenommen:
 - $\neg >_p \wedge >_p \vee >_p \rightarrow >_p \leftrightarrow$ (Präzedenzen),
 - \vee und \wedge sind assoziativ und kommutativ,

Konventionen zur Notation

- Klammereinsparungen werden nach folgenden Regeln vorgenommen:
 - $\neg >_p \wedge >_p \vee >_p \rightarrow >_p \leftrightarrow$ (Präzedenzen),
 - \vee und \wedge sind assoziativ und kommutativ,

Beispiele: $\Pi = \{P, Q, R\}$

$\perp, P, \neg Q, P \wedge \neg Q, (P \vee (\neg R \wedge \top))$ sind Formeln

Wir schreiben $P \wedge Q \wedge R$ statt $(P \wedge Q) \wedge R$.

Beispiel: 8-Damenproblem

Aussagenlogische Variablen

$D_{i,j}$ bedeutet: Auf dem Feld (i, j) steht eine Dame.

Beispiel: 8-Damenproblem

Aussagenlogische Variablen

$D_{i,j}$ bedeutet: Auf dem Feld (i, j) steht eine Dame.

Formeln

“Wenn auf dem Feld $(5, 7)$ eine Dame steht, kann keine Dame auf Feld $(5, 8)$, $(5, 6)$, $(5, 5)$, $(5, 4)$, $(5, 3)$, $(5, 2)$, $(5, 1)$ stehen”:

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$$

Syntax: Beispiel

“Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?”,
wurde ein 100 Jähriger gefragt.

“Ich halte mich streng an die Diätregeln:

- Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke,
dann habe ich immer Fisch.
- Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe,
verzichte ich auf Eiscreme.
- Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide,
dann rühre ich Fisch nicht an.”

Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

▶ $\neg B \rightarrow F$

Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

▶ $\neg B \rightarrow F$

Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme.

▶ $F \wedge B \rightarrow \neg E$

Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

▶ $\neg B \rightarrow F$

Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme.

▶ $F \wedge B \rightarrow \neg E$

Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.

▶ $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Beispiel 1

▶ $\neg B \rightarrow F$

▶ $F \wedge B \rightarrow \neg E$

▶ $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Beispiel 1

- ▶ $\neg B \rightarrow F$
- ▶ $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- ▶ $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.:

- kein Bier, Fisch und Eiscreme
erfüllt 3. Diätregel nicht!
- Bier, Fisch, keine Eiscreme
erfüllt alle Diätregeln

Beispiel 1

- ▶ $\neg B \rightarrow F$
- ▶ $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- ▶ $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.:

Formalisierung:

- kein Bier, Fisch und Eiscreme
erfüllt 3. Diätregel nicht!
- Bier, Fisch, keine Eiscreme
erfüllt alle Diätregeln

$B \mapsto$ falsch, $F \mapsto$ wahr, $E \mapsto$ wahr

$B \mapsto$ wahr, $F \mapsto$ wahr, $E \mapsto$ falsch

Beispiel 1

- ▶ $\neg B \rightarrow F$
- ▶ $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- ▶ $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.:

Formalisierung:

0:falsch, 1:wahr $\mathcal{A} : \{B, F, E\} \rightarrow \{0, 1\}$

- kein Bier, Fisch und Eiscreme
erfüllt 3. Diätregel nicht!

$$\mathcal{A}(B) = 0, \mathcal{A}(F) = 1, \mathcal{A}(E) = 1$$

- Bier, Fisch, keine Eiscreme
erfüllt alle Diätregeln

$$\mathcal{A}(B) = 1, \mathcal{A}(F) = 1, \mathcal{A}(E) = 0$$

Übersicht

Aussagenlogik

- **Syntax:** welche Formeln?

- **Semantik:** Modelle (Strukturen)

Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?

- **Deduktionsmechanismus:** Ableitung neuer wahrer Formeln

Semantik der Aussagenlogik

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) zur Verfügung stehen.

1 Symbol für den Wahrheitswert “wahr”

0 Symbol für den Wahrheitswert “falsch”

Eine **Valuation** (Wertebelegung, Interpretation, Struktur, Modell)

ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$$

Semantik der Aussagenlogik

Π eine aussagenlogische Signatur

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Eine **Valuation (Wertebelegung)** ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$$

Wir werden Wertebelegungen auch **Aussagenlogische Strukturen**, **Aussagenlogische Modelle** oder **Interpretationen** nennen.

Semantik der Aussagenlogik

Π eine aussagenlogische Signatur

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Eine **Wertebelegung** ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$$

Beispiel:

A	B	C
0	1	0

(Bei drei Symbolen gibt es 8 mögliche Modelle)