Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 2

27.04.2021

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

Aussagenlogik

- Beispiele
- Syntax (Formeln)

Vokabular der Aussagenlogik

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Pi = \{P_0, \ldots, P_n\} \quad \text{oder} \quad \Pi = \{P_0, P_1, \ldots\}$$

Bezeichnungen für Symbole in Π

- atomare Aussagen, Atome, Aussagenvariablen

Definition: Menge For_Π der Formeln über Π:

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \mathrm{For}_\Pi$ und $\bot \in \mathrm{For}_\Pi$
- $\Pi \subseteq \mathrm{For}_\Pi$
- Wenn $F, G \in \mathrm{For}_\Pi$, dann auch

  $$\neg F, (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$$

  Elemente von For_Π.

Letztes Mal

Aussagenlogik

- Syntax: welche Formeln?
- Semantik: Modelle (Strukturen)

  Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?
- Deduktionsmechanismus: Ableitung neuer wahrer Formeln

Semantik der Aussagenlogik

Π eine aussagenlogische Signatur

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Eine Wertebelegung ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$$

Beispiel:

A	B	C
0	1	0

(Bei drei Symbolen gibt es 8 mögliche Modelle)

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : \mathit{For}_\Pi \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_\Pi \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\bot) = 0$$
$$\mathcal{A}^*(\top) = 1$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_\Pi \to \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\bot) = 0$$

$$\mathcal{A}^*(\top) = 1$$

$$\mathcal{A}^*(P) = \mathcal{A}(P)$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_\Pi \to \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\neg F) = \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F) = 1 \\ 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F) = 0 \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : \mathit{For}_\Pi \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(F_1 \wedge F_2) = \begin{cases} 0 & \mathit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \\ 1 & \mathit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_\Pi \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(F_1 \wedge F_2) = \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \\ 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{A}^*(F_1 \vee F_2) = \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \\ 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0,1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_\Pi \rightarrow \{0,1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(F_1 \rightarrow F_2) = \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \\ 0 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 1 \text{ und } \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{A}^*(F_1 \leftrightarrow F_2) = \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

P	$\neg P$
0	1
1	0

Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

P	$\neg P$
0	1
1	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

P	$\neg P$
0	1
1	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Π-Valuation.

$\mathcal{A}^* : \mathit{For}_\Pi \rightarrow \{0, 1\}$ wird induktiv über Aufbau von F wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^*(\bot) &= 0 \\
\mathcal{A}^*(\top) &= 1 \\
\mathcal{A}^*(P) &= \mathcal{A}(P) \\
\mathcal{A}^*(\neg F) &= 1 - \mathcal{A}^*(F) \\
\mathcal{A}^*(F \rho G) &= \mathrm{B}_\rho(\mathcal{A}^*(F), \mathcal{A}^*(G)) \\
&\quad \mathrm{B}_\rho(x, y) \text{ berechnet entschpr. der Wahrheitstafel für } \rho \\
&\quad z.B. : \mathrm{B}_\vee(0, 1) = (0 \vee 1) = 1; \mathrm{B}_\rightarrow(1, 0) = (1 \rightarrow 0) = 0
\end{aligned}$$

Wir schreiben normalerweise $\mathcal{A}$ statt $\mathcal{A}^*$.

Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1, \mathcal{A}(Q) = 0, \mathcal{A}(R) = 1.$

$$\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to R)$$

Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1, \mathcal{A}(Q) = 0, \mathcal{A}(R) = 1$.

$$\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to R) \quad = \quad \mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to \mathcal{A}^*(R)$$

Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1, \mathcal{A}(Q) = 0, \mathcal{A}(R) = 1$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to R) \quad &= \quad \mathcal{A}^*(P \wedge (Q \vee \neg P) \to \mathcal{A}^*(R) \\
&= \quad (\mathcal{A}^*(P) \wedge \mathcal{A}^*(Q \vee \neg P)) \to \mathcal{A}^*(R)
\end{aligned}
$$

Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1, \mathcal{A}(Q) = 0, \mathcal{A}(R) = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to R) &= \mathcal{A}^*(P \wedge (Q \vee \neg P) \to \mathcal{A}^*(R) \\
&= (\mathcal{A}^*(P) \wedge \mathcal{A}^*(Q \vee \neg P)) \to \mathcal{A}^*(R) \\
&= (\mathcal{A}(P) \wedge (\mathcal{A}(Q) \vee \neg \mathcal{A}(P))) \to \mathcal{A}(R) \\
&= (1 \wedge (0 \vee \neg 1)) \to 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Beispiel 1

- $\neg B \rightarrow F$
- $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Menü **Formalisierung:**

$$\mathcal{A} : \{B, F, E\} \rightarrow \{0, 1\}$$

kein Bier, Fisch und Eiscreme $\mathcal{A}(B) = 0, \mathcal{A}(F) = 1, \mathcal{A}(E) = 1$

erfüllt 3. Diätregel nicht!

1. $\mathcal{A}(\neg B \rightarrow F) = \neg\mathcal{A}(B) \rightarrow \mathcal{A}(F) = \neg 0 \rightarrow 1 = 1 \rightarrow 1 = 1$
2. $\mathcal{A}(F \wedge B \rightarrow \neg E) = \mathcal{A}(F) \wedge \mathcal{A}(B) \rightarrow \neg\mathcal{A}(E)$
   $= (1 \wedge 0) \rightarrow \neg 1 = 0 \rightarrow 0 = 1$
3. $\mathcal{A}(E \vee \neg B \rightarrow \neg F) = (\mathcal{A}(E) \vee \neg\mathcal{A}(B)) \rightarrow \neg\mathcal{A}(F)$
   $= (1 \vee \neg 0) \rightarrow \neg 1 = 1 \rightarrow 0 = 0$

Wahrheitstabellen: Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Wahrheitstabellen: Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	
0	0	1	1	0	0	
0	1	0	0	1	1	
0	1	1	1	0	1	
1	0	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	
1	1	1	1	0	1	

Wahrheitstabellen: Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Modell einer Formel(menge)

Definition: Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formel $F \in \mathsf{For}_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1.$$

Modell einer Formel(menge)

Definition: Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formel $F \in \mathsf{For}_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1.$$

Definition: Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formelmenge $M \subseteq \mathsf{For}_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1 \text{ für alle } F \in M$$

Modell einer Formel(menge)

Definition: Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formel $F \in For_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1.$$

Definition: Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formelmenge $M \subseteq For_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1 \text{ für alle } F \in M$$

Notation:

$\mathcal{A} \models F$

$\mathcal{A} \models M$

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Sei $\mathcal{A} : \{A, B, C\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0, \mathcal{A}(B) = 1, \mathcal{A}(C) = 1$.

$\mathcal{A} \models (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

$\mathcal{A} \models \{(A \vee C), (B \vee \neg C)\}$

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Definition: F gilt in $\mathcal{A}$ (oder $\mathcal{A}$ ist Modell von F) gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$.

Notation: $\mathcal{A} \models F$

Definition: F ist (allgemein-) gültig (oder eine Tautologie)
gdw.: $\mathcal{A} \models F$, für alle $A : \Pi \to \{0, 1\}$

Notation: $\models F$

Definition: F heißt erfüllbar gdw. es $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gibt, so dass $\mathcal{A} \models F$.

Sonst heißt F unerfüllbar (oder eine Kontradiktion).

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

F ist nicht allgemeingültig:

$$\mathcal{A}_1(F) = 0 \text{ für } \mathcal{A}_1 : \{A, B, C\} \to \{0, 1\} \text{ mit } \mathcal{A}_1(A) = \mathcal{A}_1(B) = \mathcal{A}_1(C) = 0.$$

F ist erfüllbar (also ist F nicht unerfüllbar):

$$\mathcal{A}_2(F) = 1 \text{ für } \mathcal{A}_2 : \{A, B, C\} \to \{0, 1\} \text{ mit } \mathcal{A}_2(A) = 0, \mathcal{A}_2(B) = 1, \mathcal{A}_2(C) = 1.$$

Tautologien und Kontradiktionen

Tautologien: Formel, die stets wahr sind.

Beispiele: $p \vee (\neg p)$ (Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten)
(Tertium non datur)

$p \leftrightarrow \neg\neg p$ (Prinzip der doppelten Negation)

Kontradiktionen: Formel, die stets falsch sind.

Beispiel: $p \wedge \neg p$

- Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion
- Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie

Beispiele

Die folgenden Formeln sind Tautologien:

(1) $(p \to \neg p) \to (\neg p)$

(2) $(p \wedge (p \to q)) \to q$

(3) $(p \wedge q) \to p$

$(p \wedge q) \to q$

(4) $p \to (p \vee q)$

$q \to (p \vee q)$

(5) $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$

(6) $(((p \to q) \wedge (q \to r)) \wedge p) \to r$

Beispiel: (5)

$$\underbrace{(p \to q)}_{F_1} \to [\underbrace{\underbrace{(q \to r)}_{F_2} \to \underbrace{(p \to r)}_{F_3}}_{F_4}]$$

p	q	r	$p \to q$ (F_1)	$q \to r$ (F_2)	$p \to r$ (F_3)	$F_2 \to F_3$ (F_4)	$F_1 \to F_4$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Beispiel: (5)

$$\underbrace{(p \rightarrow q)}_{F_1} \rightarrow [\underbrace{\underbrace{(q \rightarrow r)}_{F_2} \rightarrow \underbrace{(p \rightarrow r)}_{F_3}}_{F_4}]$$

p	q	r	$p \rightarrow q$ (F_1)	$q \rightarrow r$ (F_2)	$p \rightarrow r$ (F_3)	$F_2 \rightarrow F_3$ (F_4)	$F_1 \rightarrow F_4$
0	0	0	1	1	1		
0	0	1	1	1	1		
0	1	0	1		1		
0	1	1	1		1		
1	0	0		1			
1	0	1		1			
1	1	0					
1	1	1					

Beispiel: (5)

$$\underbrace{(p \rightarrow q)}_{F_1} \rightarrow [\underbrace{\underbrace{(q \rightarrow r)}_{F_2} \rightarrow \underbrace{(p \rightarrow r)}_{F_3}}_{F_4}]$$

p	q	r	$p \rightarrow q$ (F_1)	$q \rightarrow r$ (F_2)	$p \rightarrow r$ (F_3)	$F_2 \rightarrow F_3$ (F_4)	$F_1 \rightarrow F_4$
0	0	0	1	1	1	1	
0	0	1	1	1	1	1	
0	1	0	1	0	1	1	
0	1	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	0	0	
1	0	1	0	1	1	1	
1	1	0	1	0	0	1	
1	1	1	1	1	1	1	

Beispiel: (5)

$$\underbrace{(p \rightarrow q)}_{F_1} \rightarrow \underbrace{[\underbrace{(q \rightarrow r)}_{F_2} \rightarrow \underbrace{(p \rightarrow r)}_{F_3}]}_{F_4}$$

p	q	r	$p \rightarrow q$ (F_1)	$q \rightarrow r$ (F_2)	$p \rightarrow r$ (F_3)	$F_2 \rightarrow F_3$ (F_4)	$F_1 \rightarrow F_4$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Bis jetzt

Eine Formel F ist:

- erfüllbar, wenn es eine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 1$.
- unerfüllbar, wenn für alle Wertebelegungen $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow$, $\mathcal{A}(F) = 0$.

Bis jetzt

Eine Formelmenge N ist:

- erfüllbar, wenn es eine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gibt, für die alle Formeln in N wahr sind (d.h. mit $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle $F \in N$).
- unerfüllbar, wenn es keine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \to$ gibt, für die alle Formeln in N wahr sind (d.h. es gibt keine Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle $F \in N$).

Bis jetzt

Eine Formelmenge N ist:

- erfüllbar, wenn es eine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gibt, für die alle Formeln in N wahr sind (d.h. mit $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle $F \in N$).
- unerfüllbar, wenn es keine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow$ gibt, für die alle Formeln in N wahr sind (d.h. es gibt keine Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle $F \in N$).

Beispiel

$N = \{P \wedge Q, \neg Q \vee R\}$ ist erfüllbar:

Für $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(R) = 1$ gilt:
$\mathcal{A}(P \wedge Q) = 1$ und $\mathcal{A}(\neg Q \vee R) = 1$ (alle Formeln in N sind wahr in $\mathcal{A}$).

$N = \{P \wedge Q, \neg Q \wedge R\}$ ist nicht erfüllbar (unerfüllbar):

Für jede Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(P \wedge Q) = 1$, ist $\mathcal{A}(Q) = 1$
Für jede Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(\neg Q \wedge R) = 1$, ist $\mathcal{A}(Q) = 0$.

Es kann keine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ geben mit
$\mathcal{A}(P \wedge Q) = 1$ und $\mathcal{A}(\neg Q \wedge R) = 1$.

Folgerung und Äquivalenz

Definition: F impliziert G (oder G folgt aus F),

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: Wenn $\mathcal{A} \models F$, dann $\mathcal{A} \models G$.

Notation: $F \models G$

Folgerung und Äquivalenz

Definition: F impliziert G (oder G folgt aus F),

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gilt: Wenn $\mathcal{A} \models F$, dann $\mathcal{A} \models G$.

Notation: $F \models G$

Achtung:

$\mathcal{A}$ Wertebelegung, F, G Formeln:

$\mathcal{A} \models F$: “$\mathcal{A}$ ist Modell von F” oder “F gilt in $\mathcal{A}$”

$F \models G$: “G folgt aus F”

Folgerung und Äquivalenz

Definition: F impliziert G (oder G folgt aus F),

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: Wenn $\mathcal{A} \models F$, dann $\mathcal{A} \models G$.

Notation: $F \models G$

Definition: F und G sind äquivalent

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: $\mathcal{A} \models F$ gdw. $A \models G$.

Notation: $F \equiv G$.

Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise, z.B.:

$N \models G$ gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt:
Wenn, für alle Formeln $F \in N$, $\mathcal{A} \models F$
dann gilt auch $\mathcal{A} \models G$.

Folgerung und Äquivalenz

Intuition:

- F impliziert G (oder G folgt aus F),
  gdw.: für jede Wertebelegung, für die F wahr ist, auch G wahr ist.

- Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise, z.B.:
  $N \models G$ gdw.: für alle Wertebelegungen, für die alle Formeln in N wahr sind, ist G auch wahr.

- Zwei Formeln F und G sind logisch äquivalent (Notation: $F \equiv G$) wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind

Beispiel: $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (Kontraposition)

Kontraposition

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	$\neg P \vee Q$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	0	0	1	0	
0	0	1	1	0	0	
0	1	0	0	1	0	
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$: Ja, $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$: Ja, $F \models G$

.... aber es ist nicht wahr dass $G \models F$ (Notation: $G \not\models F$)

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

Tautologien und Kontradiktionen

Tautologien, allgemeingültige Formeln:

Formeln, die stets wahr sind.

Kontradiktionen, unerfüllbare Formeln:

Formel, die stets falsch sind.

- Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion
- Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Beweis 1: Aus der Wahrheitstafel.

Beweis 2: F allgemeingültig gdw. $\mathcal{A}(F){=}1$ für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$

gdw. $\mathcal{A}(\neg F){=}0$ für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$ gdw. $\neg F$ unerfüllbar

Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln

Theorem. $F \models G$ gdw. $\models F \to G$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
F \models G \quad & \text{g.d.w.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}, \text{ falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ so } \mathcal{A}(G) = 1 \\
& \text{g.d.w.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}, (\mathcal{A}(F) \to \mathcal{A}(G)) = 1 \\
& \text{g.d.w.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}, \mathcal{A}(F \to G) = 1 \\
& \text{g.d.w.} \quad \models F \to G
\end{aligned}$$

Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Beweis: "$\Rightarrow$"

Annahme: $N \cup \{F\} \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}$:$\Pi \rightarrow \{0, 1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$] so $\mathcal{A}(G)=1$.

Wir beweisen, dass $N \models F \rightarrow G$, d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$
falls [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$] so $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$.

Fall 1: $\mathcal{A}(F) = 0$. Dann $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Fall 2: $\mathcal{A}(F) = 1$, d.h. [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$]. Dann
$\mathcal{A}(G) = 1$ und somit $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Beweis: "$\Leftarrow$"

Annahme: $N \models F \rightarrow G$ d.h. für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\rightarrow}\{0,1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$] so $\mathcal{A}(F \rightarrow G){=}1$.

Wir beweisen, dass $N \cup \{F\} \models G$, d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0,1\}$
falls [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$] so $\mathcal{A}(G) = 1$.

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$.

Dann (i) $\mathcal{A}(F) = 1$ und
(ii) [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$], also $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Es folgt, dass $1 = \mathcal{A}(F \rightarrow G) = (\mathcal{A}(F) \rightarrow \mathcal{A}(G)) = (1 \rightarrow \mathcal{A}(G)) = \mathcal{A}(G)$,
so $\mathcal{A}(G) = 1$.

Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln.

Theorem. $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
F \equiv G \quad & \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0,1\},\ \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) \\
& \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0,1\},\ (\mathcal{A}(F) \leftrightarrow \mathcal{A}(G)) = 1 \\
& \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0,1\},\ \mathcal{A}(F \leftrightarrow G) = 1 \\
& \text{g.d.w. } \models F \leftrightarrow G
\end{aligned}
$$

Allgemeingültigkeit/Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $F \models G$ gdw. $\models F \rightarrow G$.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Theorem. $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln.

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Beweis F wahr für jede Wertebelegung gdw. $\neg F$ falsch für jede Wertebelegung.

Theorem. $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Beweis:

$$\begin{array}{lll} F \models G & \text{gdw.} & \models F \rightarrow G \quad \text{d.h. } F \rightarrow G \text{ allgemeingültig} \\ & \text{gdw.} & \neg(F \rightarrow G) \text{ unerfüllbar.} \\ & \text{gdw.} & F \wedge \neg G \text{ unerfüllbar.} \end{array}$$

... da $\neg(F \rightarrow G) \equiv \neg(\neg F \vee G) \equiv \neg\neg F \wedge \neg G \equiv F \wedge \neg G$.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Beweis: "$\Rightarrow$"

Annahme: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}$:$\Pi \rightarrow \{0, 1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N$] so $\mathcal{A}(G)=1$.

Zu zeigen: $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar.

Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, $N \cup \{\neg G\}$ erfüllbar, d.h. es gibt $\mathcal{A}$:$\Pi \rightarrow \{0, 1\}$, mit

[$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{\neg G\}$].

Dann [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N$] und $\mathcal{A}(\neg G) = 1$ (d.h. $\mathcal{A}(G) = 0$). Widerspruch.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Beweis: "$\Leftarrow$"

Annahme: $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar.

Zu zeigen: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$] so $\mathcal{A}(G){=}1$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$, mit [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$].

Falls $\mathcal{A}(G) = 0$, wäre $\mathcal{A}$ ein Modell für $N \cup \{\neg G\}$. Das ist aber unmöglich, da wir angenommen haben, dass $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Es folgt, dass $\mathcal{A}(G) = 1$.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Theorem. $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Nota bene: falls N unerfüllbar, so $N \models G$ für jede Formel G
... auch für $\perp$.

Notation: $N \models \perp$ für N unerfüllbar.

Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Erfüllbarkeitstest:

Jede Formel F enthält endlich viele Aussagenvariablen.
$\mathcal{A}(F)$ ist nur von den Werten dieser Aussagenvariablen abhängig.

F enthält n Aussagenvariablen:

$\Rightarrow$ 2^n Wertbelegungen notwendig um zu überprüfen, ob F erfüllbar ist oder nicht.

$\Rightarrow$ Wahrheitstafel

$\Rightarrow$ Das Erfüllbarkeitsproblem ist entscheidbar

Es existieren viel bessere Methoden als Wahrheitstafeltests um die Erfüllbarkeit einer Formel zu überprüfen.

Ein zweiter Kalkül

Ein zweiter Kalkül: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel

Äquivalenz

Zwei Formeln F und G sind logisch äquivalent (Notation: $F \equiv G$) wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind

Beispiel: $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (Kontraposition)

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$$
\begin{aligned}
(F \wedge F) &\equiv F \\
(F \vee F) &\equiv F && \text{(Idempotenz)} \\[1ex]
(F \wedge G) &\equiv (G \wedge F) \\
(F \vee G) &\equiv (G \vee F) && \text{(Kommutativität)} \\[1ex]
(F \wedge (G \wedge H)) &\equiv ((F \wedge G) \wedge H) \\
(F \vee (G \vee H)) &\equiv ((F \vee G) \vee H) && \text{(Assoziativität)} \\[1ex]
(F \wedge (F \vee G)) &\equiv F \\
(F \vee (F \wedge G)) &\equiv F && \text{(Absorption)} \\[1ex]
(F \wedge (G \vee H)) &\equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)) \\
(F \vee (G \wedge H)) &\equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) && \text{(Distributivität)}
\end{aligned}
$$

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$(\neg\neg F) \equiv F$	(Doppelte Negation)
$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$	
$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$	(De Morgan's Regeln)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$	(Kontraposition)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$	(Elimination Implikation)
$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$	(Elimination Äquivalenz)

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$(F \wedge G) \equiv F$, falls G Tautologie

$(F \vee G) \equiv \top$, falls G Tautologie (Tautologieregeln)

$(F \wedge G) \equiv \bot$, falls G unerfüllbar

$(F \vee G) \equiv F$, falls G unerfüllbar (Tautologieregeln)

Wichtige Äquivalenzen mit $\top/\bot$

$(A \wedge \neg A) \equiv \bot$

$(A \vee \neg A) \equiv \top$ (Tertium non datur)

$(A \wedge \top) \equiv A$

$(A \wedge \bot) \equiv \bot$

Wichtige Äquivalenzen (Zusammengefasst)

$(F \wedge F) \equiv F$	$(F \vee F) \equiv F$	(Idempotenz)
$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$	$(F \vee G) \equiv (G \vee F)$	(Kommutativität)
$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$ $(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H)$		(Assoziativität)
$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$ $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$		(Absorption)
$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$		(Distributivität)
$(\neg\neg F) \equiv F$		(Doppelte Negation)
$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$		(De Morgan's Regeln)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$		(Kontraposition)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$		(Elimination Implikation)
$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$		(Elimination Äquivalenz)

Zusammenfassung

- Syntax (Formeln)
- Semantik

  Wertebelegungen (Valuationen, Modelle)

  Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

  Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen

  Modell einer Formel(menge)

  Gültigkeit und Erfüllbarkeit; Tautologien und Kontradiktionen

  Folgerung und Äquivalenz

  Achtung: $\mathcal{A} \models F$ vs. $F \models G$
- Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode
- Zweiter Kalkül: Äquivalenzumformung

  Bis jetzt: Wichtige Äquivalenzen