Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 4

6.05.2021

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- **Syntax** (Formeln)
- **Semantik**

  Wertebelegungen/Valuationen/Modelle

  Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen

  Gültigkeit und Erfüllbarkeit

  Folgerung, Äquivalenz
- **Kalküle**

  Wahrheitstafelmethode

  Äquivalenzumformung

  nicht sehr effizient.

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

Bis jetzt

- Normalformen

  Atome, Literale, Klauseln

  Konjunktive und Disjunktive Normalform

  Ablesen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln

  Umformen in KNF/DNF

Konjunktive Normalform (KNF) $\bigwedge_{i=1}^{n}(L_{i,1} \vee \cdots \vee L_{i,m_i})$

Konjunktion von Klauseln

Klausel: $L_{i,1} \vee \cdots \vee L_{i,m_i}$

Disjunktive Normalform (DNF) $\bigvee_{i=1}^{n}(L_{i,1} \wedge \cdots \wedge L_{i,m_i})$

KNF: Mengenschreibweise

Notation:

Klausel als Menge von Literalen

Formel in KNF als Menge von Klauseln

KNF: Mengenschreibweise

Notation:

Klausel als Menge von Literalen

Formel in KNF als Menge von Klauseln

Beispiel:

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\{ \quad \{P, Q, R\}, \quad \{P, Q, \neg R\}, \quad \{\neg P, Q, R\}, \quad \{\neg P, \neg Q, R\} \quad \}$$

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- Leere Klausel

  = leere Menge von Literalen

  = leere Disjunktion

  $= \perp$

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- Leere Klausel

  = leere Menge von Literalen

  = leere Disjunktion

  $= \bot$

- Leere Menge von Klausels

  = leere Konjunktion

  $= \top$

Vereinfachung der KNF: Subsumption

Theorem (Subsumption Regel)
Enthält eine KNF-Formel (= Klauselmenge) Klauseln K, K' mit

$$K \subset K'$$

dann entsteht eine äquivalente Formel, wenn K' weggelassen wird.

Beispiel

$$P \wedge (P \vee Q)) \qquad \mapsto \quad \{\{P\}, \ \{P, Q\}\}$$

$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P \quad \mapsto \quad \{\{P\}\}$$

Vereinfachung der KNF: Subsumption

Theorem (Subsumption Regel)
Enthält eine KNF-Formel (= Klauselmenge) Klauseln K, K' mit

$$K \subset K'$$

dann entsteht eine äquivalente Formel, wenn K' weggelassen wird.

Vereinfachung der KNF: Subsumption

Theorem (Subsumption Regel)
Enthält eine KNF-Formel (= Klauselmenge) Klauseln K, K' mit

$$K \subset K'$$

dann entsteht eine äquivalente Formel, wenn K' weggelassen wird.

Beweis:

$K = \{L_1, \ldots, L_p\} \subseteq \{L_1, \ldots, L_p, L_{p+1}, \ldots, L_m\} = K'$

F enthält $K \wedge K'$

$$\begin{aligned} K \wedge K' = & \quad (L_1 \vee \cdots \vee L_p) \wedge ((L_1 \vee \cdots \vee L_p) \vee L_{p+1} \vee \ldots L_m) \\ \equiv & \quad (L_1 \vee \cdots \vee L_p) = K \qquad \text{(Absorption)} \end{aligned}$$

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben:	Eine aussagenlogische Formel F
Frage:	Ist F erfüllbar?

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben:	Eine aussagenlogische Formel F
Frage:	Ist F erfüllbar?

NB: F allgemeingültig gdw. $\neg F$ nicht erfüllbar

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln

Sei $F = \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ in DNF

F unerfüllbar gdw. $(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ unerfüllbar für alle $i = 1, \ldots, n$

gdw. $(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ enthält zwei komplementare Literale für alle i

Beispiele:

$$\underbrace{(P \wedge \neg Q)}_{\text{erfüllbar}} \vee \underbrace{(P \wedge Q \wedge \neg R \wedge \neg Q)}_{\text{unerfüllbar}} \quad \text{erfüllbar}$$

$$\underbrace{(P \wedge \neg Q \wedge \neg P)}_{\text{unerfüllbar}} \vee \underbrace{(P \wedge Q \wedge \neg R \wedge \neg Q)}_{\text{unerfüllbar}} \quad \text{unerfüllbar}$$

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln

Sei $F = \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ in DNF

F unerfüllbar gdw. $(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ unerfüllbar für alle $i = 1, \ldots, n$

gdw. $(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ enthält zwei komplementare Literale für alle i

Allgemeingültigkeit für KNF Formeln

$F = \bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee_{j=1}^{m} L_{ij})$ in KNF ist allgemeingültig gdw. jede Disjunktion $\bigvee_{j=1}^{m} L_{ij}$ zwei komplementare Literale enthält.

Beispiele:

$$\underbrace{(P \vee \neg Q)}_{\text{erfüllbar (keine Tautologie)}} \wedge \underbrace{(P \vee Q \vee \neg R \vee \neg Q)}_{\text{Tautologie}}$$ keine Tautologie (nicht allgemeingültig)

$$\underbrace{(P \vee \neg Q \vee \neg P)}_{\text{Tautologie}} \wedge \underbrace{(P \vee Q \vee \neg R \vee \neg Q)}_{\text{Tautologie}}$$ Tautologie (allgemeingültig)

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben:	Eine aussagenlogische Formel F
Frage:	Ist F erfüllbar?

Theorem (ohne Beweis)
SAT ist ein NP-vollständiges Problem

NP

Zur Erinnerung:

- P ist die Klasse aller Probleme, die in polynomieller Zeit entscheidbar sind.

NP

Zur Erinnerung:

- P ist die Klasse aller Probleme, die in polynomieller Zeit entscheidbar sind.
- NP ist die Klasse aller Probleme, die nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar sind.

NP

Zur Erinnerung:

- P ist die Klasse aller Probleme, die in polynomieller Zeit entscheidbar sind.
- NP ist die Klasse aller Probleme, die nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar sind.

Ein Entscheidungsproblem ist genau dann in NP, wenn eine gegebene Lösung für das entsprechende Suchproblem in Polynomialzeit überprüft werden kann.

NP

Zur Erinnerung:

- P ist die Klasse aller Probleme, die in polynomieller Zeit entscheidbar sind.
- NP ist die Klasse aller Probleme, die nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar sind.

Ein Entscheidungsproblem ist genau dann in NP, wenn eine gegebene Lösung für das entsprechende Suchproblem in Polynomialzeit überprüft werden kann.

SAT ist in NP:

- Rate eine “Lösung” (Interpretation $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$)
- Überprüfe, ob $\mathcal{A}$ wirklich eine “Lösung” ist (i.e. ob $\mathcal{A}(F) = 1$)

kann in Polynomialzeit überprüft werden

NP-Vollständigkeit

Zur Erinnerung:

"SAT ist NP-vollständig" heißt:

- SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar

NP-Vollständigkeit

Zur Erinnerung:

"SAT ist NP-vollständig" heißt:

- SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar
- Jedes nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbare Problem kann in polynomieller Zeit auf SAT reduziert werden

NP-Vollständigkeit

Zur Erinnerung:

"SAT ist NP-vollständig" heißt:

- SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar
- Jedes nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbare Problem kann in polynomieller Zeit auf SAT reduziert werden
- Wenn es stimmt, dass $NP \neq P$, dann ist SAT nicht in polynomieller Zeit entscheidbar

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition:

k-KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Beispiele:

$P \wedge \neg Q$	1-KNF
$P \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q)$	2-KNF
$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$	3-KNF

Alternative Definition (nicht allgemeiner):

k-KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln genau k Literale haben

Beispiele:

$P \wedge \neg Q$	1-KNF
$(P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q)$	2-KNF
$(P \vee P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$	3-KNF

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition:

k-KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- Erfüllbarkeit für Formeln in KNF: NP-vollständig (ohne Beweis)

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition:

k-KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- Erfüllbarkeit für Formeln in KNF: NP-vollständig (ohne Beweis)
- Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF: NP-vollständig (Beweisidee)

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis

- 3-SAT ist ein Spezialfall von SAT und deshalb wie SAT in NP.
- Um zu zeigen, dass 3-SAT ebenfalls NP-vollständig ist, müssen wir zeigen, dass jedes SAT Problem in polynomieller Zeit auf das 3-SAT Problem reduzierbar ist.

3-SAT

Theorem
Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 2)

Wir zeigen, dass jedes SAT Problem in polynomieller Zeit auf das 3-SAT Problem reduzierbar ist.

Gegeben sei eine Formel F in KNF. Wir transformieren F in eine Formel F' in 3-KNF, so dass:

$$F \text{ ist erfüllbar gdw. } F' \text{ ist erfüllbar.}$$

Eine k-Klausel sei eine Klausel mit k Literalen.

Aus einer 1- bzw 2-Klausel können wir leicht eine äquivalente 3-Klausel machen, indem wir ein Literal wiederholen.

Was machen wir mit k-Klauseln für $k > 3$?

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 3)

Sei C beispielsweise eine 4-Klausel der Form

$$C = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4.$$

In einer Klauseltransformation ersetzen wir C durch die Teilformel

$$C_0 = (L_1 \vee L_2 \vee H) \wedge (\neg H \vee L_3 \vee L_4),$$

wobei H eine zusätzlich eingeführte Hilfsvariable bezeichnet.

Beispiel

$$C = P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S \quad \mapsto \quad (P \vee \neg Q \vee H) \wedge (\neg H \vee \neg R \vee S).$$

3-SAT

Theorem
Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 3)

Sei C beispielsweise eine 4-Klausel der Form

$$C = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4.$$

In einer Klauseltransformation ersetzen wir C durch die Teilformel

$$C_0 = (L_1 \vee L_2 \vee H) \wedge (\neg H \vee L_3 \vee L_4),$$

wobei H eine zusätzlich eingeführte Hilfsvariable bezeichnet.

F' sei aus F entstanden durch Ersetzung von C durch C_0.

zu zeigen: F' erfüllbar gdw. F erfüllbar

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 4)

$$C = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4; \quad C_0 = (L_1 \vee L_2 \vee H) \wedge (\neg H \vee L_3 \vee L_4),$$

F' sei aus F entstanden durch Ersetzung von C durch C_0.

zu zeigen: F' erfüllbar gdw. F erfüllbar

"$\Leftarrow$"

Sei $\mathcal{A}$ eine erfüllende Belegung für F. $\mathcal{A}$ weist mindestens einem Literal aus C den Wert 1 zu. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) Falls L_1 oder L_2 den Wert 1 haben, so ist F' für $\mathcal{A}(H) = 0$ erfüllt.
2) Falls L_3 oder L_4 den Wert 1 haben, so ist F' für $\mathcal{A}(H) = 1$ erfüllt.

Also ist F' in beiden Fällen erfüllbar.

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 5)

$$C = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4; \quad C_0 = (L_1 \vee L_2 \vee H) \wedge (\neg H \vee L_3 \vee L_4),$$

F' sei aus F entstanden durch Ersetzung von C durch C_0.

zu zeigen: F' erfüllbar gdw. F erfüllbar

"$\Rightarrow$"

Sei $\mathcal{A}$ eine erfüllende Belegung für F'. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) Falls $\mathcal{A}(H) = 0$, so muss $\mathcal{A}(L_1) = 1$ oder $\mathcal{A}(L_2) = 1$.

2) Falls $\mathcal{A}(H) = 1$, so muss $\mathcal{A}(L_3) = 1$ oder $\mathcal{A}(L_4) = 1$

In beiden Fällen erfüllt $\mathcal{A}$ somit auch C, i.e. auch F.

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 6)

Wir verallgemeinern die Klauseltransformation für $k \geq 4$:

Jede Klausel der Form

$$L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_{k-1} \vee L_k$$

wird durch eine Formel der Form

$$(L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_{k-2} \vee H) \wedge (\neg H \vee L_{k-1} \vee L_k)$$

ersetzt.

Die Erfüllbarkeitsäquivalenz folgt analog zum Fall $k = 4$.

Beispiele

Beispiel 1:

$$
\begin{aligned}
& (P \vee \neg Q \vee R \vee S \vee U \vee \neg V) \\
\mapsto \quad & (P \vee \neg Q \vee R \vee S \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee U \vee \neg V) \\
\mapsto \quad & (P \vee \neg Q \vee R \vee H_2) \wedge (\neg H_2 \vee S \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee U \vee \neg V) \\
\mapsto \quad & (P \vee \neg Q \vee H_3) \wedge (\neg H_3 \vee R \vee H_2) \wedge \\
& (\neg H_2 \vee S \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee U \vee \neg V)
\end{aligned}
$$

Beispiel 2:

$$
\begin{aligned}
& (P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg P \vee Q \vee R \vee \neg S) \\
\mapsto \quad & (P \vee \neg Q \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg P \vee Q \vee R \vee \neg S) \\
\mapsto \quad & (P \vee \neg Q \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg P \vee Q \vee H_2) \wedge (\neg H_2 \vee R \vee \neg S)
\end{aligned}
$$

Bis jetzt

- Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)
- Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

  k-KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- Erfüllbarkeit für Formeln in KNF: NP-vollständig (ohne Beweis)
- Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT): NP-vollständig
- Erfüllbarkeit für Formeln in 2-KNF: polynomiell entscheidbar

  (eine der nächsten Vorlesungen)
- Erfüllbarkeit für Formeln in DNF: polynomiell entscheidbar

  $F = \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ Formel in DNF unerfüllbar gdw. für alle i, $(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ enthält zwei komplementäre Literale.

Horn-Formeln

Defintion:

Horn-Formel: Formel in KNF, in der jede Klausel höchstens ein positives Literal enthält

Horn-Formeln

Defintion:

Horn-Formel: Formel in KNF, in der jede Klausel höchstens ein positives Literal enthält

Notation: als Implikation

$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n \vee P$	$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow P$	$P_1, \ldots, P_n \rightarrow P$
$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n$	$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow \perp$	$P_1, \ldots, P_n \rightarrow$
P	$\top \rightarrow P$	$\rightarrow P$

Horn-Formeln

Defintion:

Horn-Formel: Formel in KNF, in der jede Klausel höchstens ein positives Literal enthält

Notation: als Implikation

$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n \vee P$	$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow P$	$P_1, \ldots, P_n \rightarrow P$
$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n$	$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow \perp$	$P_1, \ldots, P_n \rightarrow$
P	$\top \rightarrow P$	$\rightarrow P$

$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$: Rumpf

P: Kopf

Horn-Formeln

Defintion:

Horn-Formel: Formel in KNF, in der jede Klausel höchstens ein positives Literal enthält

Notation: als Implikation

$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n \vee P$	$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow P$	$P_1, \ldots, P_n \rightarrow P$
$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n$	$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow \perp$	$P_1, \ldots, P_n \rightarrow$
P	$\top \rightarrow P$	$\rightarrow P$

$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$: Rumpf

P: Kopf $\qquad\qquad \rightarrow P$: Fakt

Horn Formel: Beispiele

Klausel	Literalmengen	Implikationen
$\neg P$	$\{\neg P\}$	$P \rightarrow$
$Q \vee \neg R \vee \neg S$	$\{Q, \neg R, \neg S\}$	$R, S \rightarrow Q$
$\neg Q \vee \neg S$	$\{\neg Q, \neg S\}$	$Q, S \rightarrow$
R	$\{R\}$	$\rightarrow R$
$\neg Q \vee P$	$\{\neg Q, P\}$	$Q \rightarrow P$

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem
Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Lemma. Sei F Hornformel die keine Fakten enthält. Dann ist F erfüllbar.

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem
Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Lemma. Sei F Hornformel die keine Fakten enthält. Dann ist F erfüllbar.

Beweis: Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 0$ für alle $P \in \Pi$. Dann $\mathcal{A}(F) = 1$.

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem
Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis: (Idee)

Ziel: $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$.

Falls keine Fakten in F: F erfüllbar.

Sonst: Für alle Fakten $\to P$ in F: $\mathcal{A}(P) := 1$;

Wiederhole das Verfahren für F', entstanden aus F durch Ersetzung von P mit $\top$.

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

Eingabe: $F = D_1 \wedge \cdots \wedge D_n$ eine Hornformel

(die Klausel D_i enthält höchstens ein positives Literal, $i = 1, 2, \ldots, n$)

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

Eingabe: $F = D_1 \wedge \cdots \wedge D_n$ eine Hornformel

(die Klausel D_i enthält höchstens ein positives Literal)

Ein Atom in F zu markieren, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in F zu markieren

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

0: IF keine Fakten (Klausel "$\rightarrow A$") vorhanden

THEN Ausgabe: erfüllbar

ELSE markiere alle Fakten in F (Atome A mit $\rightarrow A$ in F)

1: IF keine Klausel $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ in F, so dass

alle Atome in $A_1, \ldots, A_n$ markiert aber B nicht

THEN Ausgabe: erfüllbar

ELSE wähle die erste solche Klausel

IF B leer

THEN Ausgabe: unerfüllbar

ELSE markiere überall B in F

GOTO 1

Beispiel 1

$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Konjunktion von Implikationen:

$$\begin{array}{rlr}
(P \to \bot) & \wedge & P \to \\
(\top \to Q) & \wedge & \to Q \\
(P \to R) & \wedge & P \to R \\
(Q \to S) & \wedge & Q \to S \\
(W \to T) & \wedge & W \to T \\
(S \to U) & \wedge & S \to U \\
((U \wedge T \wedge Z) \to P) & \wedge & U, T, Z \to P \\
((Q \wedge S \wedge U) \to W) & & Q, S, U \to W
\end{array}$$

Beispiel 1

$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow \\
&\rightarrow \underline{Q} \\
P &\rightarrow R \\
\underline{Q} &\rightarrow S \\
W &\rightarrow T \\
S &\rightarrow U \\
U, T, Z &\rightarrow P \\
\underline{Q}, S, U &\rightarrow W
\end{aligned}
$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

$$\begin{aligned} P &\rightarrow \\ &\rightarrow \underline{Q} \\ P &\rightarrow R \\ \underline{Q} &\rightarrow \underline{S} \\ W &\rightarrow T \\ \underline{S} &\rightarrow U \\ U, T, Z &\rightarrow P \\ \underline{Q}, \underline{S}, U &\rightarrow W \end{aligned}$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$ und Q markiert

Beispiel 1

$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$

$$P \rightarrow$$
$$\rightarrow \underline{Q}$$
$$P \rightarrow R$$
$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$
$$W \rightarrow T$$
$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$
$$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$$
$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow W$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$ und Q markiert

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$ und S markiert

Beispiel 1

$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$

$$
\begin{array}{r}
P \rightarrow \\
\rightarrow \underline{Q} \\
P \rightarrow R \\
\underline{Q} \rightarrow \underline{S} \\
\underline{W} \rightarrow T \\
\underline{S} \rightarrow \underline{U} \\
\underline{U}, T, Z \rightarrow P \\
\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}
\end{array}
$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$ und Q markiert

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$ und S markiert

$\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$ und Q, S, U markiert

Beispiel 1

$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow \\
&\rightarrow \underline{Q} \\
P &\rightarrow R \\
\underline{Q} &\rightarrow \underline{S} \\
\underline{W} &\rightarrow \underline{T} \\
\underline{S} &\rightarrow \underline{U} \\
\underline{U}, \underline{T}, Z &\rightarrow P \\
\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} &\rightarrow \underline{W}
\end{aligned}
$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$ und Q markiert

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$ und S markiert

$\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$ und Q, S, U markiert

$\{Q, S, U, W, T\}$ wegen $W \rightarrow T$ und W markiert

Beispiel 1

$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$ Erfüllbar

Markierte Atome und Erklärung:

$$\begin{aligned} P &\rightarrow \\ &\rightarrow \underline{Q} \\ P &\rightarrow R \\ \underline{Q} &\rightarrow \underline{S} \\ \underline{W} &\rightarrow \underline{T} \\ \underline{S} &\rightarrow \underline{U} \\ \underline{U}, \underline{T}, Z &\rightarrow P \\ \underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} &\rightarrow \underline{W} \end{aligned}$$

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$ und Q markiert

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$ und S markiert

$\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$ und Q, S, U markiert

$\{Q, S, U, W, T\}$ wegen $W \rightarrow T$ und W markiert

Keine weiteren Schritte möglich, da es
keine Implikation gibt,deren linke Seite
vollständig markiert ist und die rechte Seite nicht

Modell: $\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(T) = 1,\ \mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(Z) = 0$

Markierte Atome: wahr; nicht markierte Atome: falsch.

Beispiel 2

$(\neg P) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$ Erfüllbar

Markierte Atome und Erklärung:

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow \\
P &\rightarrow R \\
Q &\rightarrow S \\
W &\rightarrow T \\
S &\rightarrow U \\
U, T, Z &\rightarrow P \\
Q, S, U &\rightarrow W
\end{aligned}
$$

Keine Schritte möglich, da es

keine Implikation gibt,deren linke Seite

vollständig markiert ist und die rechte Seite nicht

Modell: $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(Z) = 0$

Beispiel 3

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U)$$

$$\begin{array}{r}
P \rightarrow \\
\rightarrow \underline{Q} \\
P \rightarrow R \\
\underline{Q} \rightarrow \underline{S} \\
W \rightarrow T \\
\underline{S} \rightarrow \underline{U} \\
\underline{U}, T, Z \rightarrow P \\
\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow
\end{array}$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$ und Q markiert

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$ und S markiert

Unerfüllbar

Q, S, U markiert, aber Kopf von

$Q, S, U \rightarrow$ leer

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem
Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis: (Idee)

Ziel: $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$.

Falls keine Fakten in F: F erfüllbar.

Sonst: Für alle Fakten $\to P$ in F: $\mathcal{A}(P) := 1$;

Wiederhole das Verfahren für F', entstanden aus F durch Ersetzung von P mit $\top$.

Komplexität: $|F| \times |F|$

Bis jetzt

- Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)
- Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

  k-KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- Erfüllbarkeit für Formeln in KNF: NP-vollständig (ohne Beweis)
- Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT): NP-vollständig
- Erfüllbarkeit für Formeln in 2-KNF: polynomiell entscheidbar

  (eine der nächsten Vorlesungen)
- Erfüllbarkeit für Formeln in DNF: polynomiell entscheidbar
- Erfüllbarkeit für Horn-Formeln: polynomiell entscheidbar