

Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 6

18.05.2021

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

Unser Ziel:

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

Resolution

bis jetzt

Korrektheit

Vollständigkeit

Terminierung

2. Formelmengen

Semantische Tableaux

Jetzt

Unser Ziel:

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

Resolution

Korrektheit

Vollständigkeit

Terminierung

2. Formelmengen

Semantische Tableaux

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Beweis durch Fallunterscheidung
- Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Nachteile

- Mehr als eine Regel

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(F \wedge G)$
- $F \vee G$
- $F \rightarrow G$

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$F \wedge G$	F	G
$\neg(F \vee G)$	$\neg F$	$\neg G$
$\neg(F \rightarrow G)$	F	$\neg G$
$\neg\neg F$	F	

Formeltypen

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(F \wedge G)$
- $F \vee G$
- $F \rightarrow G$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

β	β_1	β_2
$\neg(F \wedge G)$	$\neg F$	$\neg G$
$F \vee G$	F	G
$F \rightarrow G$	$\neg F$	G

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaunkalküls

α

α_1

α_2

Regeln des (aussagenlogischen) Tableauealküls

α		$p \wedge q$
<hr/>		
α_1	Konjunktiv	p
α_2		q

Regeln des (aussagenlogischen) Tableauealküls

α			$p \wedge q$
<hr/>			
α_1	Konjunktiv		p
α_2			q
			$p \vee q$
β			/ \
<hr/>	Disjunktiv		p q
β_1 β_2			

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

α			$p \wedge q$
<hr/>			
α_1	Konjunktiv		p
α_2			q
β			$p \vee q$
<hr/>			/ \
β_1 β_2	Disjunktiv		p q
ϕ			ϕ
$\neg\phi$	Widerspruch		$\neg\phi$
<hr/>			
\perp			\perp

Instanzen der α und β -Regel

Instanzen der α -Regel

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$
$$Q$$

$$\frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P}$$
$$\neg Q$$

$$\frac{\neg(P \rightarrow Q)}{P}$$
$$\neg Q$$

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der α und β -Regel

Instanzen der α -Regel

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

Q

$$\frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P}$$

$\neg Q$

$$\frac{\neg(P \rightarrow Q)}{P}$$

$\neg Q$

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

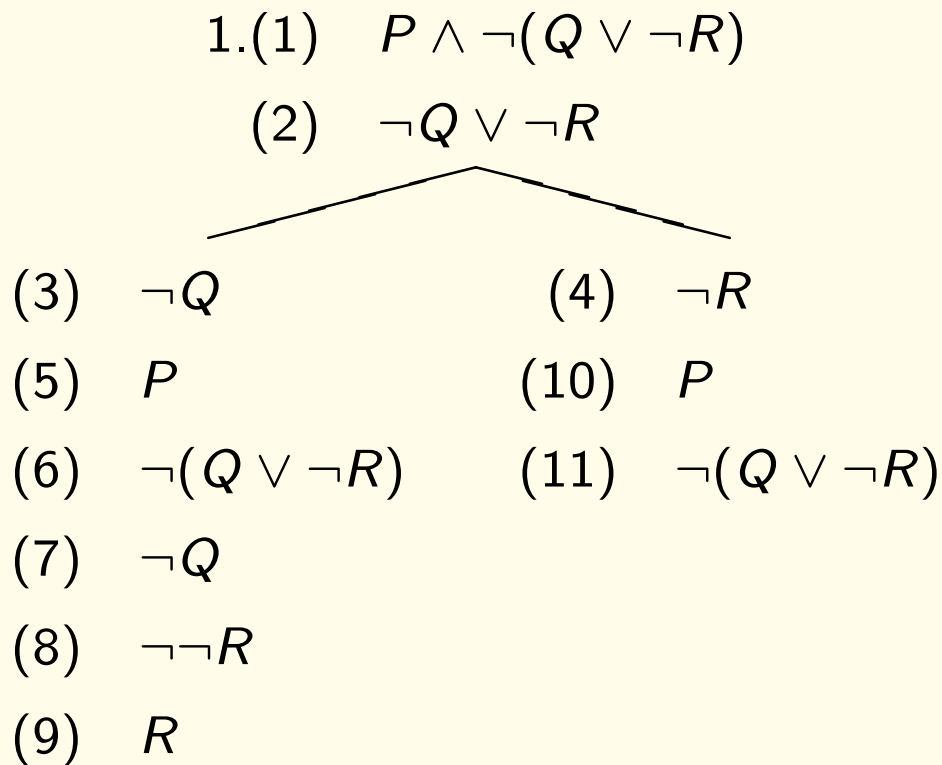
Instanzen der β -Regel

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q}$$

$$\frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q}$$

$$\frac{P \rightarrow Q}{\neg P \mid Q}$$

Ein Tableau für $\{P \wedge \neg(Q \vee \neg R), \neg Q \vee \neg R\}$



Dieses Tableau ist nicht “maximal”, aber der erste “Ast” ist.

Dieser Ast ist nicht “geschlossen” (enthält keinen Widerspruch), also ist die Formelmengenge $\{(1), (2)\}$ erfüllbar. (Diese Begriffe werden später erklärt.)

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
Auswahl der nächsten Formel, auf die eine Regel angewendet wird

Heuristik

- Nicht-verzweigende Regeln zuerst: α vor β

Nota bene:

Dieselbe Formel kann mehrfach (auf verschiedenen Ästen) verwendet werden

Beispiel

Zu zeigen:

$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))$ allgemeingültig

Beispiel

Zu zeigen:

$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))$ allgemeingültig

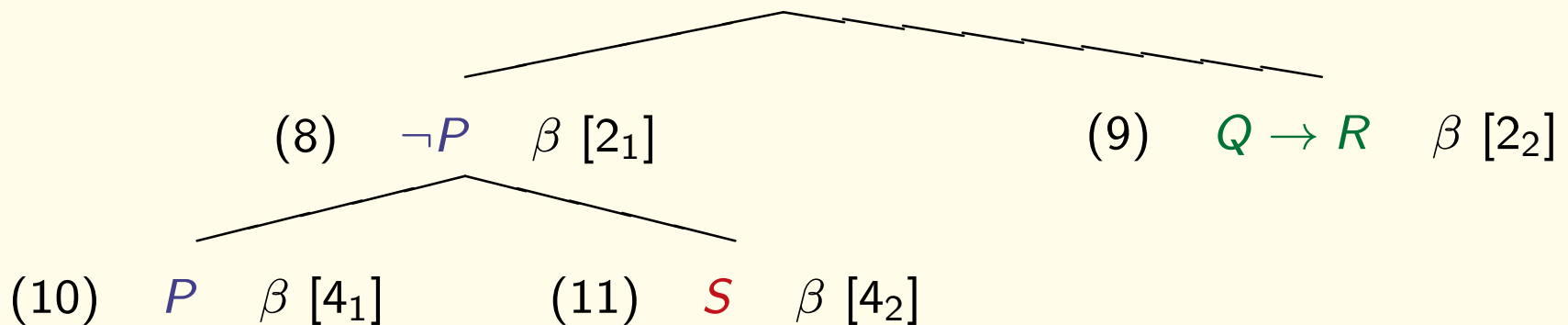
Wir zeigen, dass

$\neg[(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))]$

unerfüllbar ist.

Beispiel

- (1) $\neg[(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))]$
- (2) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ $\alpha [1_1]$
- (3) $\neg((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))$ $\alpha [1_2]$
- (4) $P \vee S$ $\alpha [3_1]$
- (5) $\neg((Q \rightarrow R) \vee S)$ $\alpha [3_2]$
- (6) $\neg(Q \rightarrow R)$ $\alpha [5_1]$
- (7) $\neg S$ $\alpha [5_2]$



geschlossenes Tableau.

Formale Definition des Kalküls

Definition

Tableau: Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Formale Definition des Kalküls

Definition

Tableau: Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Definition

Tableauast: Maximaler Pfad in einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmeng

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmeng

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M , die kein Literal ist

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M , die kein Literal ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M , die kein Literal ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Dann ist T' ein Tableau für M .

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Definition.

Ast B eines Tableaus für M ist **geschlossen**, wenn es eine Formel F existiert, so dass B die Formeln F und $\neg F$ enthält.

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Definition.

Ast B eines Tableaus für M ist **geschlossen**, wenn es eine Formel F existiert, so dass B die Formeln F und $\neg F$ enthält.

Definition.

Ein Tableau ist **geschlossen**, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist.

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Definition.

Ast B eines Tableaus für M ist **geschlossen**, wenn es eine Formel F existiert, so dass B die Formeln F und $\neg F$ enthält.

Definition.

Ein Tableau ist **geschlossen**, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist.

Definition.

Ein Tableau für M , das geschlossen ist, ist ein Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M

Beispiel

Zu zeigen:

$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))$ allgemeingültig

Beispiel

Zu zeigen:

$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))$ allgemeingültig

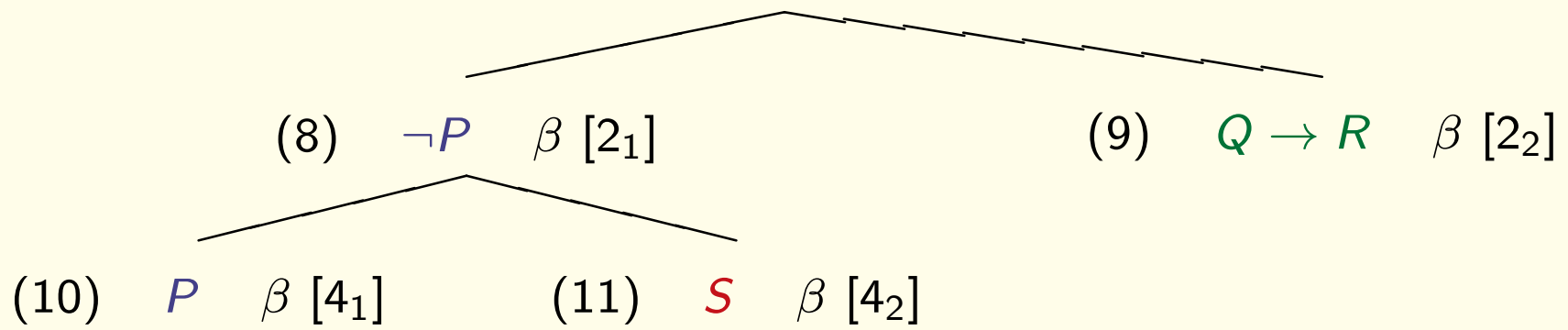
Wir zeigen, dass

$\neg[(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))]$

unerfüllbar ist.

Beispiel

- (1) $\neg[(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))]$
- (2) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ α [1₁]
- (3) $\neg((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))$ α [1₂]
- (4) $P \vee S$ α [3₁]
- (5) $\neg((Q \rightarrow R) \vee S)$ α [3₂]
- (6) $\neg(Q \rightarrow R)$ α [5₁]
- (7) $\neg S$ α [5₂]



geschlossenes Tableau.

Klauseltableau

M Menge von Klauseln

Klauseltableau

M Menge von Klauseln

Änderungen

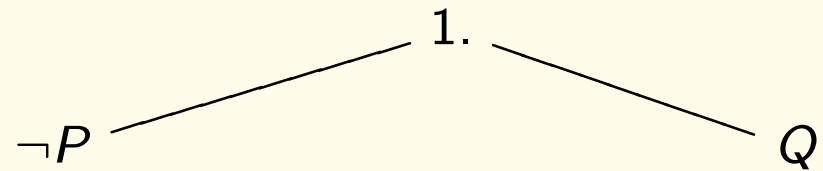
- Keine α -Regel
- Erweiterungsregel kann Verzweigungsgrad > 2 haben
- Alle Knoten im Tableau enthalten Literale

Klauseltableau: Beispiel

$$M = \{ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\} \}$$

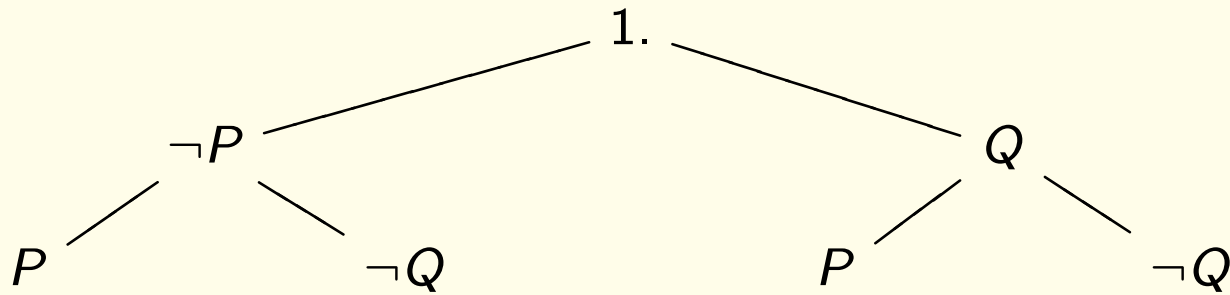
Klauseltableau: Beispiel

$$M = \{ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\} \}$$



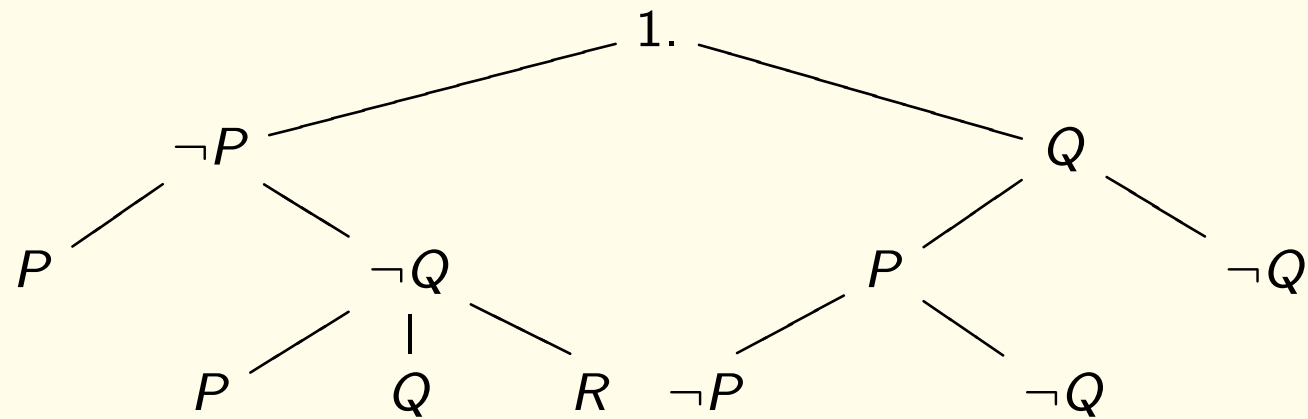
Klauseltableau: Beispiel

$$M = \{ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\} \}$$



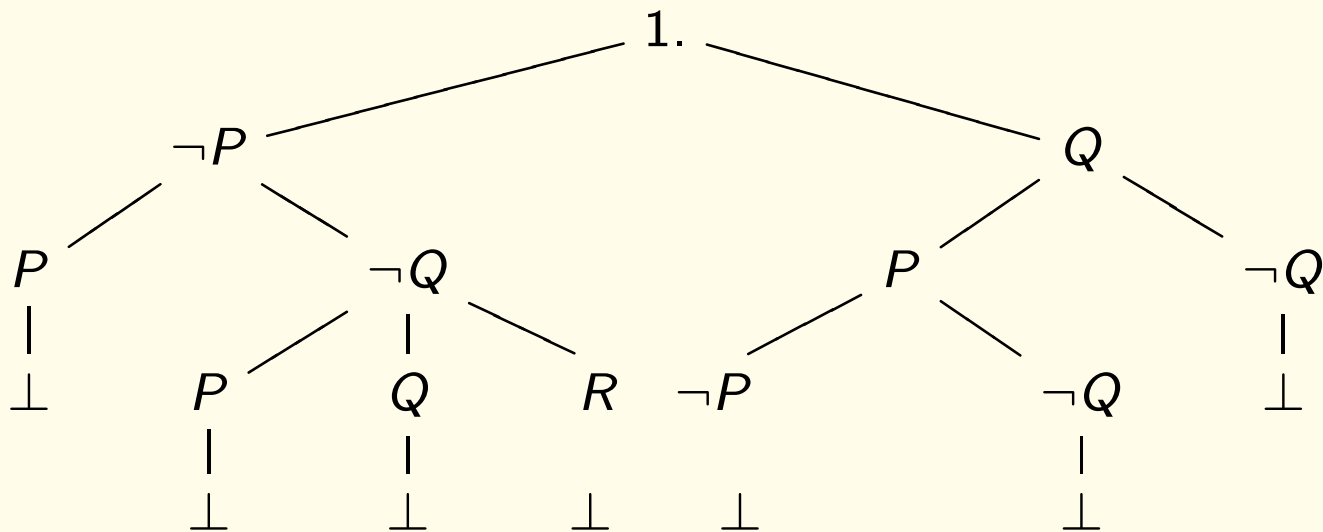
Klauseltableau: Beispiel

$$M = \{ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\} \}$$



Klauseltableau: Beispiel

$$M = \{ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\} \}$$



Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem.

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt

Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem.

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt

Korrektheit: “ \Leftarrow ”

Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt
(d.h. ein Tableau für M , das geschlossen ist)
so ist M unerfüllbar.

... **alternativ:**

Falls M erfüllbar ist, hat M kein geschlossenes Tableau.

Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem.

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt

Vollständigkeit: “ \Rightarrow ”

Falls M unerfüllbar ist,
gibt es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M
(d.h. ein Tableau für M , das geschlossen ist).

Kern des Korrektheitsbeweises

Theorem (Korrektheit)

Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt (d.h. ein Tableau für M , das geschlossen ist) so ist M unerfüllbar.

... **alternativ**: Falls M erfüllbar ist, hat M kein geschlossenes Tableau.

Kern des Korrektheitsbeweises

Theorem (Korrektheit)

Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt (d.h. ein Tableau für M , das geschlossen ist) so ist M unerfüllbar.

... **alternativ**: Falls M erfüllbar ist, hat M kein geschlossenes Tableau.

Definition.

Ein Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Ein Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Kern des Korrektheitsbeweises

Theorem (Korrektheit)

Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt (d.h. ein Tableau für M , das geschlossen ist) so ist M unerfüllbar.

... **alternativ**: Falls M erfüllbar ist, hat M kein geschlossenes Tableau.

Definition.

Ein Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Ein Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

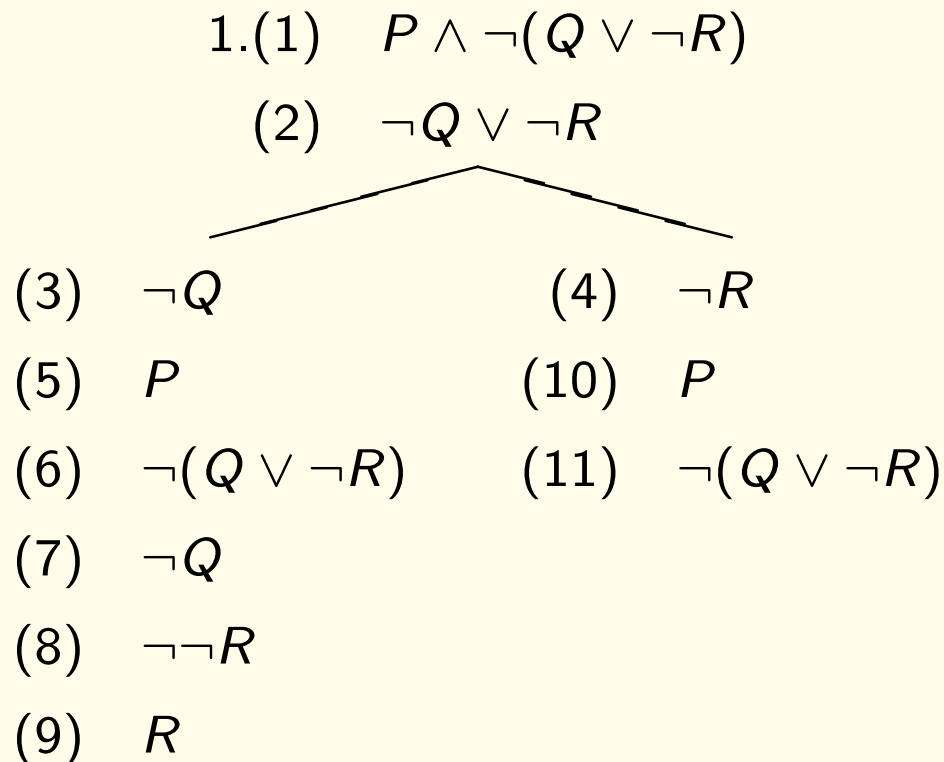
Lemma 2. Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

... Also: Kein geschlossenes Tableau für erfüllbare Formelmenge

Beispiel

$$M = \{P \wedge \neg(Q \vee \neg R), \quad \neg Q \vee \neg R\}$$

Tableau für M :



Der erste Ast ist erfüllbar.

Also ist das Tableau erfüllbar.

[M besteht aus zwei Formeln, also sind beide Formeln im Knoten 1. enthalten]

Lemma 1: Beweis

Definition.

Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.

Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Lemma 1: Beweis

Definition.

Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.

Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Beweis: Induktion $p(n)$: Falls M erfüllbar und das Tableau T in n Schritten aus M gebildet wurde, ist T erfüllbar

Lemma 1: Beweis

Definition.

Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.

Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Beweis: Induktion $p(n)$: Falls M erfüllbar und das Tableau T in n Schritten aus M gebildet wurde, ist T erfüllbar

Induktionsbasis: T wurde in einem Schritt gebildet.

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

da M erfüllbar ist, ist ein solches Tableau erfüllbar

Lemma 1: Beweis

Definition. Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.
Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Beweis: Induktion $p(n)$: Falls M erfüllbar und das Tableau T in n Schritten aus M gebildet wurde, ist T erfüllbar

Induktionsschritt: Annahme $p(n)$ gilt. Zu zeigen: $p(n + 1)$.

Sei T ein in $n + 1$ Schritten gebildetes Tableau für M .

Dann gibt es ein Tableau T' für M (in n Schritten gebildet), ein Ast B von T' und eine Formel F auf B , die kein Literal ist, so dass T durch die Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β) entstanden ist.

Lemma 1: Beweis

Definition. Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.
Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

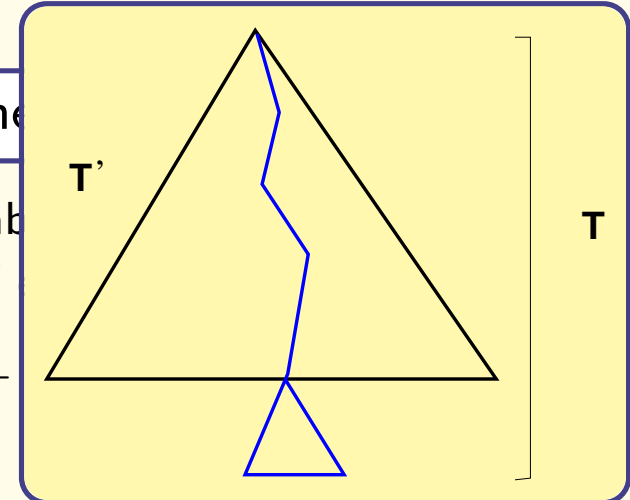
Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formel

Beweis: Induktion $p(n)$: Falls M erfüllbar und das Tableau T aus M gebildet wurde, ist T

Induktionsschritt: Annahme $p(n)$ gilt. Zu zeigen: $p(n + 1)$

Sei T ein in $n + 1$ Schritten gebildetes Tableau für M .

Dann gibt es ein Tableau T' für M (in n Schritten gebildet), ein Ast B von T' und eine Formel F auf B , die kein Literal ist, so dass T durch die Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β) entstanden ist.



Lemma 1: Beweis

Definition. Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.
Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formel

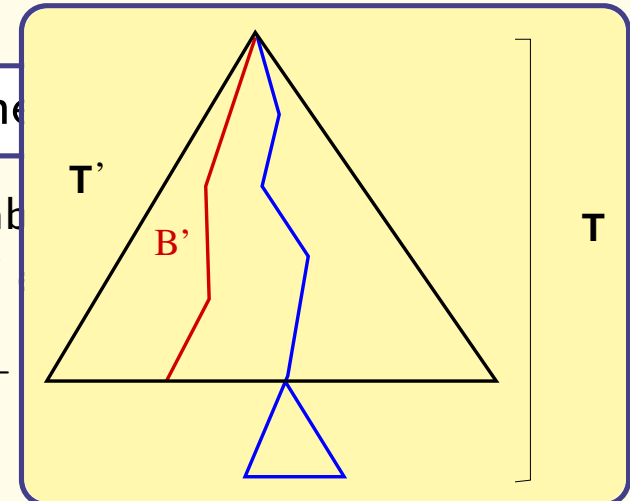
Beweis: Induktion $p(n)$: Falls M erfüllbar und das Tableau T aus M gebildet wurde, ist T

Induktionsschritt: Annahme $p(n)$ gilt. Zu zeigen: $p(n + 1)$

Sei T ein in $n + 1$ Schritten gebildetes Tableau für M .

Dann gibt es ein Tableau T' für M (in n Schritten gebildet), ein Ast B von T' und eine Formel F auf B , die kein Literal ist, so dass T durch die Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β) entstanden ist.

Induktionsvoraussetzung: T' erfüllbar, d.h. hat (mindestens) einen erfüllbaren Ast B' .



Lemma 1: Beweis

Definition. Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.
 Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formel

Beweis: Induktion $p(n)$: Falls M erfüllbar und das Tableau T aus M gebildet wurde, ist T

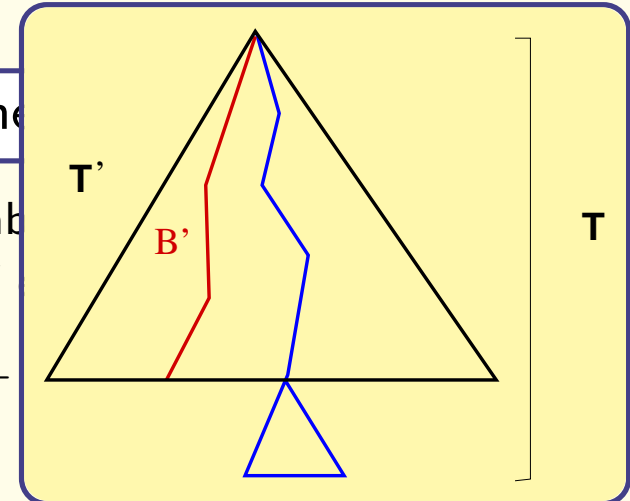
Induktionsschritt: Annahme $p(n)$ gilt. Zu zeigen: $p(n + 1)$

Sei T ein in $n + 1$ Schritten gebildetes Tableau für M .

Dann gibt es ein Tableau T' für M (in n Schritten gebildet), ein Ast B von T' und eine Formel F auf B , die kein Literal ist, so dass T durch die Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β) entstanden ist.

Induktionsvoraussetzung: T' erfüllbar, d.h. hat (mindestens) einen erfüllbaren Ast B' .

Fall 1: $B' \neq B$. Dann ist B' auch Ast in T , d.h. T erfüllbar.



Lemma 1: Beweis

Definition. Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.
 Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formel

Beweis: Induktion $p(n)$: Falls M erfüllbar und das Tableau T aus M gebildet wurde, ist T

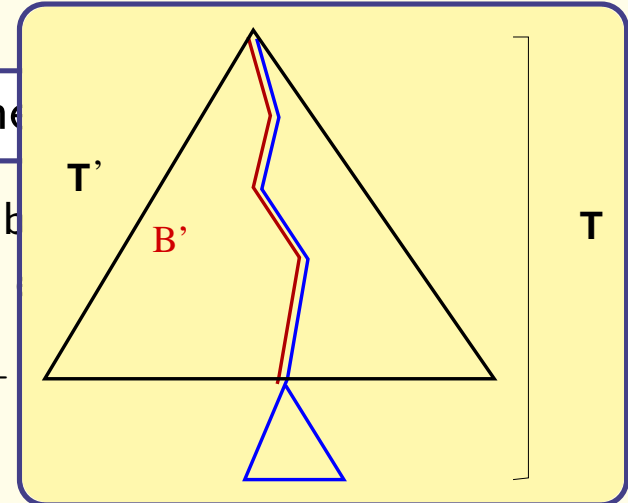
Induktionsschritt: Annahme $p(n)$ gilt. Zu zeigen: $p(n + 1)$

Sei T ein in $n + 1$ Schritten gebildetes Tableau für M .

Dann gibt es ein Tableau T' für M (in n Schritten gebildet), ein Ast B von T' und eine Formel F auf B oder in M , die kein Literal ist, so dass T durch die Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β) entstanden ist.

Induktionsvoraussetzung: T' erfüllbar, d.h. hat (mindestens) einen erfüllbaren Ast B' .

Fall 2: $B' = B$ d.h. B erfüllbar. Sei \mathcal{A} Modell für die Formeln N_B auf B .



Lemma 1: Beweis

Definition. Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.
 Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formel

Beweis: Induktion $p(n)$: Falls M erfüllbar und das Tableau T aus M gebildet wurde, ist T

Induktionsschritt: Annahme $p(n)$ gilt. Zu zeigen: $p(n + 1)$

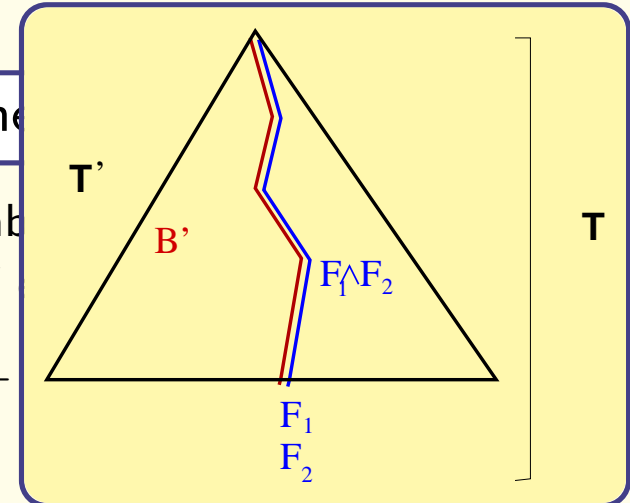
Sei T ein in $n + 1$ Schritten gebildetes Tableau für M .

Dann gibt es ein Tableau T' für M (in n Schritten gebildet), ein Ast B von T' und eine Formel F auf B oder in M , die kein Literal ist, so dass T durch die Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β) entstanden ist.

Induktionsvoraussetzung: T' erfüllbar, d.h. hat (mindestens) einen erfüllbaren Ast B' .

Fall 2: $B' = B$ d.h. B erfüllbar. Sei \mathcal{A} Modell für die Formeln N_B auf B .

Fall 2a: α -Regel angewandt $F \equiv F_1 \wedge F_2$. Dann ist \mathcal{A} Modell für $N_B \cup \{F_1, F_2\}$, d.h.: die Erweiterung von B mit dieser α -Regel ist erfüllbar, so T erfüllbar.



Lemma 2: Beweis

Definition.

Tableauast ist **erfüllbar**, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist **erfüllbar**, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Lemma 2. Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

Beweis: Kontraposition

Annahme: T erfüllbar. Dann hat T einen erfüllbaren Ast B .

Falls die Menge der Formeln auf B (und M) erfüllbar ist, kann B nicht Formeln F und $\neg F$ enthalten, d.h. B kann nicht geschlossen sein.

Korrektheit

Theorem (Korrektheit)

Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt (d.h. ein Tableau für M , das geschlossen ist) so ist M unerfüllbar.

Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Korrektheit)

Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt (d.h. ein Tableau für M , das geschlossen ist) so ist M unerfüllbar.

Theorem (Vollständigkeit)

Falls M unerfüllbar, so gibt es einen Tableaubeweis für die Unerfüllbarkeit von M (d.h. ein Tableau für M , das geschlossen ist).

... alternativ:

“falls es keinen Tableaubeweis für die Unerfüllbarkeit von M gibt (d.h. “**maximales Tableau**” für M nicht geschlossen) so ist M erfüllbar”

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Definition.

Ein Tableau heißt **voll expandiert**, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist.

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Definition.

Ein Tableau heißt **voll expandiert**, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist.

Lemma 3.

Sei B offener Ast in voll expandiertem Tableau.

Dann ist die Menge der Formeln in B erfüllbar.

... Also: Voll expandiertes Tableau für unerfüllbares M ist geschlossen

Lemma 3: Beweis

Lemma 3.

Sei B offener Ast in voll expandiertem Tableau.

Dann ist die Menge der Formeln in B erfüllbar.

Beweis: (für klausale Tableaux)

Sei N die Menge der Formeln auf B . Da B offen ist, ist \perp nicht in N .

Seien $C \vee A$, $D \vee \neg A$ zwei Klauseln in N die komplementäre Literale enthalten. Einer von C , D ist nicht leer (sonst wäre B geschlossen).

Annahme: C nicht leer. Da B voll expandiert ist, wurde die β -Regel für $C \vee A$ angewandt (auch für $D \vee \neg A$ falls D nicht leer).

Fall 1: $A, \neg A \in B$: unmöglich, da B offen ist.

Fall 2: $A, L \in B$ mit L Literal in D . N erfüllbar gdw. $N \setminus \{D \vee \neg A\}$ erfüllbar.

Fall 3: $L, \neg A \in B$, mit L Literal in C . N erfüllbar gdw. $N \setminus \{C \vee A\}$ erfüllbar.

Fall 4: $L_1, L_2 \in B$, mit L_1 Literal in C , L_2 Literal in D .

N erfüllbar gdw. $N \setminus \{C \vee A, D \vee \neg A\}$ erfüllbar.

$N \mapsto N'$, N' Klauselmenge ohne komplementäre Literale und ohne \perp

Die Erfüllbarkeit von N' folgt aus der Vollständigkeit der Resolution.

Zusammenfassung: Tableaukalkül

Beweis durch Widerspruch und Fallunterscheidung

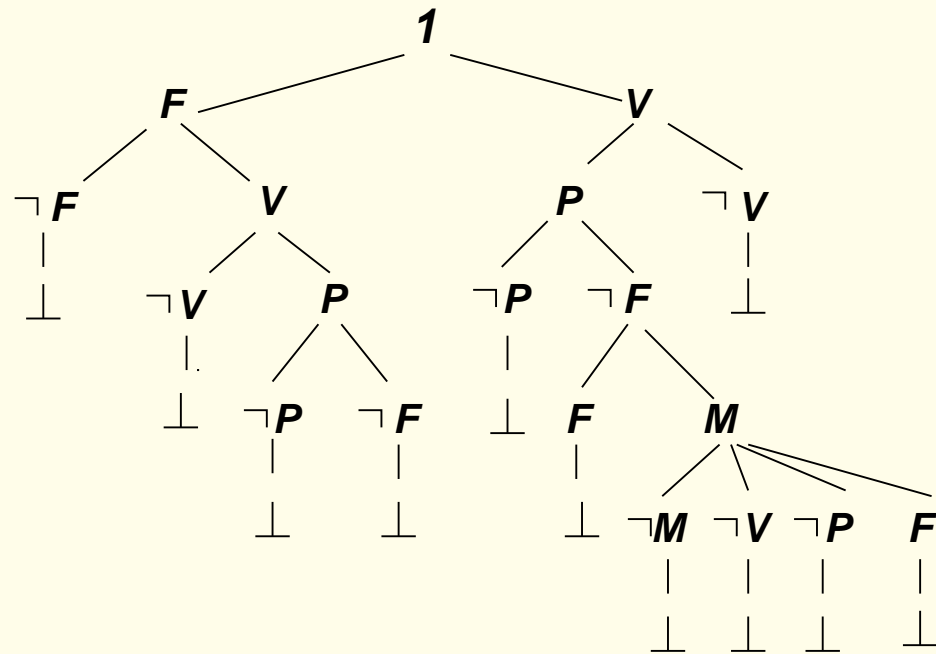
- Tableauregeln (mit uniformer Notation)
- Formale Definition des Kalküls
- Korrektheit und Vollständigkeit

Klauseltableau: Beispiel

- (1) $F \vee V$
- (2) $F \vee M$
- (3) $M \vee V$
- (4) $M \vee P$
- (5) $M \vee \neg P \vee V$
- (6) $F \vee M \vee V$
- (7) $F \vee M \vee P$
- (8) $F \vee \neg P \vee V$
- (9) $P \vee F$
- (10) $P \vee M$
- (11) $\neg V \vee P$
- (12) $P \vee V$
- (13) $\neg F \vee V$
- (14) $\neg P \vee \neg F$
- (15) $\neg M \vee \neg V \vee \neg P \vee F$

Klauseltableau: Beispiel

- (1) $F \vee V$
- (2) $F \vee M$
- (3) $M \vee V$
- (4) $M \vee P$
- (5) $M \vee \neg P \vee V$
- (6) $F \vee M \vee V$
- (7) $F \vee M \vee P$
- (8) $F \vee \neg P \vee V$
- (9) $P \vee F$
- (10) $P \vee M$
- (11) $\neg V \vee P$
- (12) $P \vee V$
- (13) $\neg F \vee V$
- (14) $\neg P \vee \neg F$
- (15) $\neg M \vee \neg V \vee \neg P \vee F$



Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität:

Kein Literal darf auf einem Ast mehr als einmal vorkommen

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität:

Kein Literal darf auf einem Ast mehr als einmal vorkommen

Schwache Konnektionsbedingung (Connection calculus)

Bei Erweiterung von Ast B muss mindestens eines der neuen Literale komplementär zu Literal in B sein

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität:

Kein Literal darf auf einem Ast mehr als einmal vorkommen

Schwache Konnektionsbedingung (Connection calculus)

Bei Erweiterung von Ast B muss mindestens eines der neuen Literale komplementär zu Literal in B sein.

Starke Konnektionsbedingung (Modellelimination)

Bei Erweiterung von Ast B muss mindestens eines der neuen Literale komplementär zum **Blatt** von B sein – außer beim ersten Schritt.

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Theorem (hier ohne Beweis)

Regularität, starke und schwache Konnektionsbedingung
erhalten Vollständigkeit.

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Theorem (hier ohne Beweis)

Regularität, starke und schwache Konnektionsbedingung
erhalten Vollständigkeit.

Falls eine Formelmenge M unerfüllbar ist, so gibt es ein Tableau für M , das geschlossen ist und die Regularitätsbedingung (bzw. starke Konnektionsbedingung, bzw. schwache Konnektionsbedingung) erfüllt.

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Theorem (hier ohne Beweis)

Regularität, starke und schwache Konnektionsbedingung
erhalten Vollständigkeit.

Jedoch

Bei starker Konnektionsbedingung kann ungünstige Erweiterung in
Sackgasse führen.

(bei schwacher Konnektionsbedingung nicht)

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Theorem (hier ohne Beweis)

Regularität, starke und schwache Konnektionsbedingung
erhalten Vollständigkeit.

Jedoch

Bei starker Konnektionsbedingung kann ungünstige Erweiterung in
Sackgasse führen.

(bei schwacher Konnektionsbedingung nicht)

Beispiel: $M = \{\{P\}, \{\neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\}\}$

Zuerst $\{\neg P, Q\}$: OK

Zuerst $\{\neg P, R\}$: Sackgasse

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Signatur: *F*: Flugreise *V*: Vollpension *M*: Meer *P*: Pool

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Signatur: F : Flugreise V : Vollpension M : Meer P : Pool

Falls sie nicht mit dem Flugzeug fliegen, besteht der Vater auf Vollpension am Meer.

$$\neg F \rightarrow (V \wedge M)$$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Signatur: F : Flugreise V : Vollpension M : Meer P : Pool

Falls sie nicht mit dem Flugzeug fliegen, besteht der Vater auf Vollpension am Meer.

$$\neg F \rightarrow (V \wedge M)$$

Die Mutter möchte mindestens einen ihrer drei Wünsche erfüllt sehen: ans Meer fliegen, oder am Meer ohne Pool, oder Vollpension und Pool.

$$(M \wedge F) \vee (M \wedge \neg P) \vee (V \wedge P)$$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Signatur: F : Flugreise V : Vollpension M : Meer P : Pool

Falls sie nicht mit dem Flugzeug fliegen, besteht der Vater auf Vollpension am Meer.

$$\neg F \rightarrow (V \wedge M)$$

Die Mutter möchte mindestens einen ihrer drei Wünsche erfüllt sehen: ans Meer fliegen, oder am Meer ohne Pool, oder Vollpension und Pool.

$$(M \wedge F) \vee (M \wedge \neg P) \vee (V \wedge P)$$

Gibt es keinen Pool, so besteht Tochter Lisa auf einer Flugreise und Urlaub am Meer und darauf, dass keine Vollpension gebucht wird.

$$\neg P \rightarrow (F \wedge M \wedge \neg V)$$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Signatur: F : Flugreise V : Vollpension M : Meer P : Pool

Falls sie nicht mit dem Flugzeug fliegen, besteht der Vater auf Vollpension am Meer.

$$\neg F \rightarrow (V \wedge M)$$

Die Mutter möchte mindestens einen ihrer drei Wünsche erfüllt sehen: ans Meer fliegen, oder am Meer ohne Pool, oder Vollpension und Pool.

$$(M \wedge F) \vee (M \wedge \neg P) \vee (V \wedge P)$$

Gibt es keinen Pool, so besteht Tochter Lisa auf einer Flugreise und Urlaub am Meer und darauf, dass keine Vollpension gebucht wird.

$$\neg P \rightarrow (F \wedge M \wedge \neg V)$$

Auch dem Baby soll einer seiner Wünsche erfüllt werden: erstens einen Pool und nicht fliegen oder zweitens Vollpension, dann aber ohne Pool.

$$(P \wedge \neg F) \vee (V \wedge \neg P)$$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Behauptung

Dann müssen sie ans Meer mit Vollpension, mit Pool und ohne Flug.

$$M \wedge V \wedge P \wedge \neg F$$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Behauptung

Dann müssen sie ans Meer mit Vollpension, mit Pool und ohne Flug.

$$M \wedge V \wedge P \wedge \neg F$$

Zu zeigen:

$$\{\neg F \rightarrow (V \wedge M), (M \wedge F) \vee (M \wedge \neg P) \vee (V \wedge P), \\ \neg P \rightarrow (F \wedge M \wedge \neg V), (P \wedge \neg F) \vee (V \wedge \neg P)\} \models M \wedge V \wedge P \wedge \neg F$$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Behauptung

Dann müssen sie ans Meer mit Vollpension, mit Pool und ohne Flug.

$$M \wedge V \wedge P \wedge \neg F$$

Zu zeigen:

$$\{\neg F \rightarrow (V \wedge M), (M \wedge F) \vee (M \wedge \neg P) \vee (V \wedge P), \\ \neg P \rightarrow (F \wedge M \wedge \neg V), (P \wedge \neg F) \vee (V \wedge \neg P)\} \models M \wedge V \wedge P \wedge \neg F$$

Wir zeigen, dass die folgende Konjunktion unerfüllbar ist:

$$\begin{aligned} &(\neg F \rightarrow (V \wedge M), (M \wedge F)) \wedge \\ &((M \wedge F) \vee (M \wedge \neg P) \vee (V \wedge P)) \wedge \\ &(\neg P \rightarrow (F \wedge M \wedge \neg V)) \wedge \\ &((P \wedge \neg F) \vee (V \wedge \neg P)) \wedge \\ &\neg M \vee \neg V \vee \neg P \vee F \end{aligned}$$

(Negation der Behauptung)

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

$$\neg F \rightarrow (V \wedge M)$$

$$(M \wedge F) \vee (M \wedge \neg P) \vee (V \wedge P)$$

$$\neg P \rightarrow (F \wedge M \wedge \neg V)$$

$$(P \wedge \neg F) \vee (V \wedge \neg P)$$

Negation der Behauptung

- | | |
|------|---|
| (1) | $F \vee V$ |
| (2) | $F \vee M$ |
| (3) | $M \vee V$ |
| (4) | $M \vee P$ |
| (5) | $M \vee \neg P \vee V$ |
| (6) | $F \vee M \vee V$ |
| (7) | $F \vee M \vee P$ |
| (8) | $F \vee \neg P \vee V$ |
| (9) | $P \vee F$ |
| (10) | $P \vee M$ |
| (11) | $P \vee \neg V$ |
| (12) | $P \vee V$ |
| (13) | $\neg F \vee V$ |
| (14) | $\neg F \vee \neg P$ |
| (15) | $\neg M \vee \neg V \vee \neg P \vee F$ |

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Beobachtung

Konstruktion des Konnektionstableaus

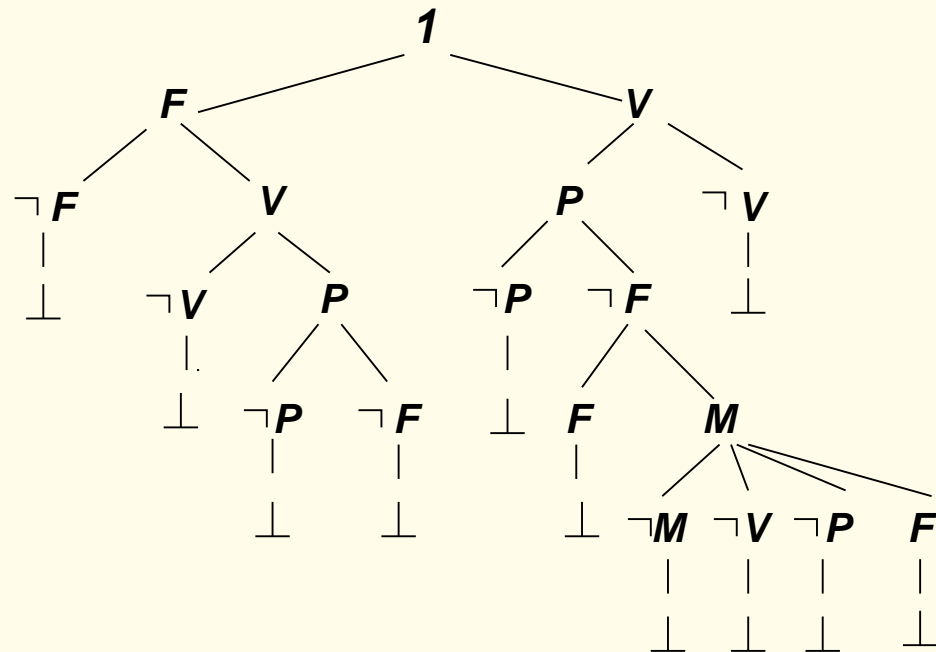
- bei Beginn mit Klausel (1)
- mit Regularität
- mit starker Konnektionsbedingung

Dann:

Nahezu deterministische Beweiskonstruktion

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

- (1) $F \vee V$
- (2) $F \vee M$
- (3) $M \vee V$
- (4) $M \vee P$
- (5) $M \vee \neg P \vee V$
- (6) $F \vee M \vee V$
- (7) $F \vee M \vee P$
- (8) $F \vee \neg P \vee V$
- (9) $P \vee F$
- (10) $P \vee M$
- (11) $P \vee \neg V$
- (12) $P \vee V$
- (13) $\neg F \vee V$
- (14) $\neg F \vee \neg P$
- (15) $\neg M \vee \neg V \vee \neg P \vee F$



Terminierung

Resolution (für Klauselmengen in Mengennotation) terminiert, für jede endliche Menge von Klauseln.

Ähnliches Resultat für Tableaux?

Terminierung

Definition. Ein Tableau ist **strikt**, falls für jede Formel F die entsprechende Erweiterungsregel höchstens einmal auf jeden Ast, der die Formel enthält, angewandt wurde.

Theorem.

Sei T ein striktes aussagenlogisches Tableau. Dann ist T endlich.

Beweis: Neue Formeln mit denen ein Tableau erweitert wird sind \perp , (\top) oder Teilformeln der Formel, auf der die Erweiterungsregel angewandt wird. Da T strikt ist, wird für jede Formel F die entsprechende Erweiterungsregel höchstens einmal auf jeden Ast, der die Formel enthält, angewandt.

Dann sind alle Äste in T endlich, und so ist auch T endlich (König's Lemma).

Zusammenfassung: Tableaukalkül

Beweis durch Widerspruch und Fallunterscheidung

- Tableauregeln (mit uniformer Notation)
- Formale Definition des Kalküls
- Korrektheit und Vollständigkeit
- Klauseltableau
- Regularität
- Schwache und starke Konnektionsbedingung
- Strikte Tableaux
- Terminierung