# Logik für Informatiker

## 1. Grundlegende Beweisstrategien

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

# Organisatorisches

- Am Freitag, 16.04.2021, um 12:00 Uhr: Erstes Übungsblatt.

# Mathematisches Beweisen

Beweise in der Mathematik (und in der Informatik) haben viele Funktionen:

- Erkenntnissicherung
- Begründung/Veranschaulichung
- Überzeugen und Kommunizieren
- Finden von neuen Sätzen und Begriffen

*"Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden."*

Richard Dedekind

# Mathematisches Beweisen

## Mathematische Aussagen

- haben oft die Form: Wenn $A$, dann $B$.
- als Formel: $A \rightarrow B$

## Mathematischer Beweis

- bzgl. eines vorgegebenen Axiomensystems
- mit Hilfe von Inferenzregeln

# Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $A \to B$ (Wenn $A$, dann $B$)

- Direkter Beweis:
  Annahme: $A$ gilt. Benutze $A$, Axiome, und Inferenzregeln
  um $B$ zu beweisen.

Dazu zeigt man oft Zwischenresultate, also

$$A \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to B.$$

Wir nehmen $A$ an, folgern daraus $A_1$, dann $A_2$,. . . , dann $A_n$ und daraus folgern wir $B$.

# Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $A \rightarrow B$ (Wenn $A$, dann $B$)

- Direkter Beweis:
  Annahme: $A$ gilt. Benutze $A$, Axiome, und Inferenzregeln um $B$ zu beweisen.

**Behauptung:** Wenn $x$ die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

# Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $A \rightarrow B$ (Wenn $A$, dann $B$)

- Direkter Beweis:

  Annahme: $A$ gilt. Benutze $A$, Axiome, und Inferenzregeln um $B$ zu beweisen.

**Behauptung:** Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

Beweis in schematischer Darstellung:

| | Aussage | Begründung |
|---|---|---|
| 1. | $x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ | Gegeben |
| 2. | $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$, $d \geq 1$ | Gegeben |
| 3. | $a^2 \geq 1$, $b^2 \geq 1$, $c^2 \geq 1$, $d^2 \geq 1$ | (2) und Gesetze der Arithmetik |
| 4. | $x \geq 4$ | (1), (3) und Gesetze der Arithmetik |
| 5. | $2^x \geq x^2$ | (4) und Satz aus der Analysis |

# Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $A \to B$ (Wenn $A$, dann $B$)

- Direkter Beweis:

  Annahme: $A$ gilt. Benutze $A$, Axiome, und Inferenzregeln um $B$ zu beweisen.

**Behauptung:** Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl $n$ ist stets ungerade.

Zu zeigen: $n \in \mathbb{N}$ und $n$ ungerade $\to$ $n^2$ ungerade

# Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $A \rightarrow B$ (Wenn $A$, dann $B$)

- Direkter Beweis:

  Annahme: $A$ gilt. Benutze $A$, Axiome, und Inferenzregeln um $B$ zu beweisen.

**Behauptung:** Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl $n$ ist stets ungerade.

Zu zeigen: $n \in \mathbb{N}$ und $n$ ungerade $\rightarrow$ $n^2$ ungerade

| | Begründung | |
|---|---|---|
| *Beweis:* Es sei $n$ eine ungerade natürliche Zahl. | (1) | Annahme |
| Dann lässt sich $n$ als $n = 2k + 1$ darstellen, wobei $k \in \mathbb{N}$. | (2) | (1) + Gesetze der Arithmetik |
| Daraus folgt mit Hilfe der ersten binomischen Formel, dass: $$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1.$$ | (3) | (2) + Gesetze der Arithmetik |
| Aus der Möglichkeit, $n^2$ so darzustellen folgt, dass $n^2$ ungerade ist. | | |

# Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $A \to B$ (Wenn $A$, dann $B$)

- Beweis durch Kontraposition:

  Beweis von $\neg B \to \neg A$.

# Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $A \to B$ (Wenn $A$, dann $B$)

- Beweis durch Kontraposition:

  Beweis von $\neg B \to \neg A$.

**Beispiel:**

Alter $\leq 16 \to$ Darf kein Alkohol kaufen

# Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $A \rightarrow B$ (Wenn $A$, dann $B$)

- Beweis durch Kontraposition:

  Beweis von $\neg B \rightarrow \neg A$.

**Beispiel:**

$$\underbrace{\text{Alter} \leq 16}_{A} \rightarrow \underbrace{\text{Darf kein Alkohol kaufen}}_{B}$$

$$\underbrace{\text{Darf Alkohol kaufen}}_{\neg B} \rightarrow \underbrace{\neg\ (\text{Alter} \leq 16)}_{\neg A}$$

## Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $A \to B$ (Wenn $A$, dann $B$)

- Beweis durch Kontraposition:

  Beweis von $\neg B \to \neg A$.

**Beispiel:**

$$\underbrace{\text{Alter} \leq 16}_{A} \to \underbrace{\text{Darf kein Alkohol kaufen}}_{B}$$

$$\underbrace{\text{Darf Alkohol kaufen}}_{\neg B} \to \underbrace{\neg\ (\text{Alter} \leq 16)}_{\neg A}$$

Begründung (Wird in dieser Vorlesung besprochen)

$A \to B \equiv \neg A \vee B \equiv B \vee \neg A \equiv \neg\neg B \vee \neg A \equiv \neg B \to \neg A$

# Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $A \to B$ (Wenn $A$, dann $B$)

- Beweis durch Kontraposition:

  Beweis von $\neg B \to \neg A$.

- Beweis durch Widerspruch:

  Beweise dass $A \wedge \neg B \to$ falsch

# Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $A \rightarrow B$ (Wenn $A$, dann $B$)

- Beweis durch Kontraposition:

  Beweis von $\neg B \rightarrow \neg A$.

**Behauptung:** Ist die Wurzel aus einer geraden natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl, so ist diese gerade.

Annahme: $\sqrt{n} = k \in \mathbb{N}$.
Zu zeigen: $n$ gerade $\rightarrow k$ gerade

Beweis durch Kontraposition: Zu zeigen:
$\sqrt{n} = k \in \mathbb{N}$ und $k$ ungerade $\rightarrow n$ ungerade.

# Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $A \to B$ (Wenn $A$, dann $B$)

- Beweis durch Kontraposition:

  Beweis von $\neg B \to \neg A$.

**Behauptung:** Ist die Wurzel aus einer geraden natürlichen Zahl $n$ eine natürliche Zahl, so ist diese gerade.

Zu zeigen: $\sqrt{n} = k \in \mathbb{N}$ und $k$ ungerade $\to n$ ungerade.

*Beweis:* Angenommen, $\sqrt{n} = k$ wäre ungerade.
Dann ist wegen der bereits bewiesenen Behauptung auch $k^2 = n$ ungerade.

# Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen der Form $A \rightarrow B$ (Wenn $A$, dann $B$)

- Beweis durch Kontraposition:
  Beweis von $\neg B \rightarrow \neg A$.

- Beweis durch Widerspruch:
  Beweise dass $A \wedge \neg B \rightarrow$ falsch

**Behauptung:** Ist die Wurzel aus einer geraden natürlichen Zahl $n$ eine natürliche Zahl, so ist diese gerade.

*Beweis durch Widerspruch:* Sei $n$ eine gerade natürliche Zahl.
Angenommen, $\sqrt{n} = k$ wäre ungerade.
Dann ist wegen der bereits bewiesenen Behauptung auch $k^2 = n$ ungerade,
und das ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $n$ gerade ist.
Also ist die getroffene Annahme falsch, d.h., $\sqrt{n}$ muss gerade sein.

# Grundlegende Beweisstrategien

Mathematische Aussagen, die nicht die Form $A \rightarrow B$ haben

- Äquivalenzbeweis ($A \leftrightarrow B$) ($A$ genau dann, wenn $B$)
  Beweise dass $A \rightarrow B$ und dass $B \rightarrow A$.
  (Wenn $A$, dann $B$, und wenn $B$, dann $A$.)

# Grundlegende Beweisstrategien

- Beweis durch Widerspruch

  Um $A$ zu beweisen:

  Annahme: $A$ ist falsch (die Negation von $A$ ist wahr)

  Zeige, dass dies zu einem Widerspruch führt.

# Grundlegende Beweisstrategien

- Beweis durch Widerspruch

  Um $A$ zu beweisen:

  Annahme: $A$ ist falsch (die Negation von $A$ ist wahr)

  Zeige, dass dies zu einem Widerspruch führt.

**Behauptung:** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

# Grundlegende Beweisstrategien

- Beweis durch Widerspruch

  Um $A$ zu beweisen:

  Annahme: $A$ ist falsch (die Negation von $A$ ist wahr)

  Zeige, dass dies zu einem Widerspruch führt.

**Behauptung:** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

*Beweis:* Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und somit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ wobei der Bruch $p/q$ in gekürzter Form vorliegt (d.h. $p$ und $q$ teilerfremde ganze Zahlen sind).

# Grundlegende Beweisstrategien

- Beweis durch Widerspruch

  Um $A$ zu beweisen:

  Annahme: $A$ ist falsch (die Negation von $A$ ist wahr)

  Zeige, dass dies zu einem Widerspruch führt.

**Behauptung:** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

*Beweis:* Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und somit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ wobei der Bruch $p/q$ in gekürzter Form vorliegt (d.h. $p$ und $q$ teilerfremde ganze Zahlen sind). Dann $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, d.h: $p^2 = 2q^2$.

# Grundlegende Beweisstrategien

- Beweis durch Widerspruch

  Um $A$ zu beweisen:

  Annahme: $A$ ist falsch (die Negation von $A$ ist wahr)

  Zeige, dass dies zu einem Widerspruch führt.

**Behauptung:** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

*Beweis:* Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und somit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ wobei der Bruch $p/q$ in gekÃ¼rzter Form vorliegt (d.h. $p$ und $q$ teilerfremde ganze Zahlen sind). Dann $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, d.h: $p^2 = 2q^2$. Da $2q^2$ eine gerade Zahl ist, ist auch $p^2$ gerade. Daraus folgt, dass auch $p$ gerade ist, d.h. $p = 2r$ (wobei $r \in \mathbb{Z}$).

# Grundlegende Beweisstrategien

- Beweis durch Widerspruch

  Um $A$ zu beweisen:

  Annahme: $A$ ist falsch (die Negation von $A$ ist wahr)

  Zeige, dass dies zu einem Widerspruch führt.

**Behauptung:** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

*Beweis:* Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und somit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ wobei der Bruch $p/q$ in gekürzter Form vorliegt (d.h. $p$ und $q$ teilerfremde ganze Zahlen sind). Dann $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, d.h: $p^2 = 2q^2$. Da $2q^2$ eine gerade Zahl ist, ist auch $p^2$ gerade. Daraus folgt, dass auch $p$ gerade ist, d.h. $p = 2r$ (wobei $r \in \mathbb{Z}$). Damit erhält man mit obiger Gleichung: $2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$, und hieraus nach Division durch 2: $q^2 = 2r^2$.

# Grundlegende Beweisstrategien

- Beweis durch Widerspruch

  Um $A$ zu beweisen:

  Annahme: $A$ ist falsch (die Negation von $A$ ist wahr)

  Zeige, dass dies zu einem Widerspruch führt.

**Behauptung:** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

*Beweis:* Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und somit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ wobei der Bruch $p/q$ in gekürzter Form vorliegt (d.h. $p$ und $q$ teilerfremde ganze Zahlen sind). Dann $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, d.h: $p^2 = 2q^2$. Da $2q^2$ eine gerade Zahl ist, ist auch $p^2$ gerade. Daraus folgt, dass auch $p$ gerade ist, d.h. $p = 2r$ (wobei $r \in \mathbb{Z}$). Damit erhält man mit obiger Gleichung: $2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$, und hieraus nach Division durch 2: $q^2 = 2r^2$. Mit der gleichen Argumentation wie zuvor folgt, dass $q^2$ und damit auch $q$ eine gerade Zahl ist.

# Grundlegende Beweisstrategien

- Beweis durch Widerspruch

  Um $A$ zu beweisen:

  Annahme: $A$ ist falsch (die Negation von $A$ ist wahr)

  Zeige, dass dies zu einem Widerspruch führt.

**Behauptung:** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

*Beweis:* Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und somit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ wobei der Bruch $p/q$ in gekürzter Form vorliegt (d.h. $p$ und $q$ teilerfremde ganze Zahlen sind). Dann $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, d.h: $p^2 = 2q^2$. Da $2q^2$ eine gerade Zahl ist, ist auch $p^2$ gerade. Daraus folgt, dass auch $p$ gerade ist, d.h. $p = 2r$ (wobei $r \in \mathbb{Z}$). Damit erhält man mit obiger Gleichung: $2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$, und hieraus nach Division durch 2: $q^2 = 2r^2$. Mit der gleichen Argumentation wie zuvor folgt, dass $q^2$ und damit auch $q$ eine gerade Zahl ist.

Da $p$ und $q$ durch 2 teilbar sind, erhalten wir einen Widerspruch zur Teilerfremdheit von $p$ und $q$. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, $\sqrt{2}$ sei eine rationale Zahl, falsch ist und daher das Gegenteil gelten muss. Damit haben wir bewiesen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

# Grundlegende Beweisstrategien

- Beweis durch Fallunterscheidung

  Um $B$ zu beweisen, beweise dass $A_1 \to B, \ldots, A_n \to B$,
  wobei $A_1 \vee \cdots \vee A_n \equiv$ wahr

# Grundlegende Beweisstrategien

- Beweis durch Fallunterscheidung

  Um $B$ zu beweisen, beweise dass $A_1 \to B, \ldots, A_n \to B$,
  wobei $A_1 \vee \cdots \vee A_n \equiv$ wahr

**Behauptung:** Jede Primzahl $p \geq 3$ hat die Form $p = 4 \cdot k + 1$ oder $p = 4 \cdot k - 1$ mit $k \in \mathbb{N}$.

*Beweis:* Wir zeigen, dass für jede Primzahl $p \geq 3$
ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $p = 4 \cdot k + 1$ oder ein $k' \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $p = 4 \cdot k' - 1$.

Man unterscheidet folgende vier Fälle für $p$, von denen immer genau einer eintritt:

**Fall 1:** $p = 4k$ mit $k \in \mathbb{N}$
**Fall 2:** $p = 4k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$
**Fall 3:** $p = 4k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}$
**Fall 4:** $p = 4k + 3 = 4(k + 1) - 1$ mit $k \in \mathbb{N}$

Im ersten dieser Fälle ist $p$ durch 4 teilbar und damit keine Primzahl,
im dritten Fall ist $p$ durch 2 teilbar und somit ebenfalls keine Primzahl.
Also muss einer der Fälle zwei oder vier eintreten, d.h. $p = 4 \cdot k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$ (Fall 2) oder $p = 4 \cdot k' - 1$ mit $k' \in \mathbb{N}$ (Fall 4 mit $k' = k + 1$).

# Grundlegende Beweisstrategien

- Beweis durch Fallunterscheidung

  Um $B$ zu beweisen, beweise dass $A_1 \to B, \ldots, A_n \to B$,

  wobei $A_1 \vee \cdots \vee A_n \equiv$ wahr

Es sei angemerkt, dass die Fallunterscheidung zwar vollständig sein muss, aber die untersuchten Fälle sich nicht gegenseitig ausschließen müssen.

# Grundlegende Beweisstrategien

## Aussagen mit Quantoren

$\forall x \in U : (p(x) \rightarrow q(x))$

Wähle $a$ beliebig aus $U$.

Beweise, dass $p(a) \rightarrow q(a)$.

Da $a$ beliebig gewählt werden kann, folgt

$$\forall x \in U : p(x) \rightarrow q(x)$$

# Grundlegende Beweisstrategien

## Aussagen mit Quantoren

$\forall x \in U : (p(x) \rightarrow q(x))$

Wähle $a$ beliebig aus $U$.

Beweise, dass $p(a) \rightarrow q(a)$.

Da $a$ beliebig gewählt werden kann, folgt

$$\forall x \in U : p(x) \rightarrow q(x)$$

**Behauptung:** $\forall n \in \mathbb{N} : (\underbrace{n \text{ ist gerade und } \sqrt{n} \text{ ist eine natürliche Zahl}}_{p(n)} \rightarrow \underbrace{\sqrt{n} \text{ ist gerade}}_{q(n)})$.

*Beweis:* Sei $n$ beliebig aus $\mathbb{N}$.
Wir zeigen, dass wenn $n$ gerade ist und $\sqrt{n}$ eine natürliche Zahl ist, dann $\sqrt{n}$ gerade ist.
(Dies wurde auf Seiten 11 / 12 / 13 bewiesen.)

# Grundlegende Beweisstrategien

## Aussagen mit Quantoren

$\exists x \in U\, A(x)$

Finde $a \in U$ ein geeignetes Element aus $U$.

Beweise, dass $A(a)$ wahr ist.

Damit folgt $\exists x \in U : A(x)$.

# Grundlegende Beweisstrategien

## Aussagen mit Quantoren

$\exists x \in U \, A(x)$

Finde $a \in U$ ein geeignetes Element aus $U$.

Beweise, dass $A(a)$ wahr ist.

Damit folgt $\exists x \in U : A(x)$.

**Behauptung:** $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 - 2x + 1 = 0$

*Beweis:* $A(x) : \quad x^2 - 2x + 1 = 0$

Sei $a = 1$.

# Grundlegende Beweisstrategien

Aussagen mit Quantoren

$\exists x \in U\, A(x)$

Finde $a \in U$ ein geeignetes Element aus $U$.

Beweise, dass $A(a)$ wahr ist.

Damit folgt $\exists x \in U : A(x)$.

**Behauptung:** $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 - 2x + 1 = 0$

*Beweis:* $A(x): \quad x^2 - 2x + 1 = 0$
Sei $a = 1$. Wir zeigen, dass $A(a)$ wahr ist: $\quad a^2 - 2a + 1 = 1^2 - 2 + 1 = 0.$

# Grundlegende Beweisstrategien

## Aussagen mit Quantoren

$\exists x \in U\, A(x)$

Finde $a \in U$ ein geeignetes Element aus $U$.

Beweise, dass $A(a)$ wahr ist.

Damit folgt $\exists x \in U : A(x)$.

**Behauptung:** $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 - 2x + 1 = 0$

*Beweis:* $A(x) : \quad x^2 - 2x + 1 = 0$
Sei $a = 1$. Wir zeigen, dass $A(a)$ wahr ist: $\quad a^2 - 2a + 1 = 1^2 - 2 + 1 = 0.$
Damit folgt $\exists x \in \mathbb{N} : A(x)$

# Grundlegende Beweisstrategien

## Aussagen mit Quantoren

$\exists x \in U \, A(x)$

Sei $a$ ein geeignetes Element aus $U$.
Beweise, dass $A(a)$ wahr ist.  Damit folgt $\exists x \in U : A(x)$.

$\exists x \in U \, (p(x) \rightarrow q(x))$

Sei $a$ ein geeignetes Element aus $U$.
Beweis der Implikation $p(a) \rightarrow q(a)$.
Damit folgt $\exists x \in U : p(x) \rightarrow q(x)$.

# Grundlegende Beweisstrategien

Beweise mittels Vollständiger Induktion

# Induktion

Wesentliches Beweisprinzip in Mathematik und Logik

# Induktion

Wesentliches Beweisprinzip in Mathematik und Logik

## Einfache Version

Induktion über die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$
(natural induction)

# Induktion

Wesentliches Beweisprinzip in Mathematik und Logik

## Einfache Version

Induktion über die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$
(natural induction)

## Generalization

Noethersche Induktion
(noetherian induction/
induction over well-founded partially ordered sets)

**Hier:** Strukturelle Induktion

# Induktion über die natürlichen Zahlen

**Idee:** Definition der natürlichen Zahlen

(A1) 0 ist eine natürliche Zahl

(A2) Jede natürliche Zahl $n$ hat einen Nachfolger $S(n)$

(A3) Aus $S(n) = S(m)$ folgt $n = m$

(A4) 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl

(A5) Jede Menge $X$, die 0 und mit jeder natürlichen Zahl $n$ auch deren Nachfolger $S(n)$ enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen.

# Induktion über die natürlichen Zahlen

(A5) Jede Menge $X$, die 0 und mit jeder natürlichen Zahl $n$ auch deren Nachfolger $S(n)$ enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen.

$$\forall X \text{ Menge:} \quad \text{Falls} \quad 0 \in X, \text{ und}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : n \in X \to n+1 \in X$$
$$\text{so} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \in X$$

# Induktion über die natürlichen Zahlen

(A5) Jede Menge $X$, die 0 und mit jeder natürlichen Zahl $n$ auch deren Nachfolger $S(n)$ enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen.

$$\begin{array}{lll} \forall X \text{ Menge:} & \text{Falls} & 0 \in X \text{, und} \\ & & \forall n \in \mathbb{N} : n \in X \rightarrow n+1 \in X \\ & & \\ & \text{so} & \forall n \in \mathbb{N} : n \in X \end{array}$$

Induktionssatz

Gelten die beiden Aussagen:

- $p(0)$ und
- $\forall n \in \mathbb{N} : p(n) \rightarrow p(n+1)$,

dann gilt auch $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

# Induktion über die natürlichen Zahlen

(A5) Jede Menge $X$, die 0 und mit jeder natürlichen Zahl $n$ auch deren Nachfolger $S(n)$ enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen.

$\forall X$ Menge: Falls $0 \in X$, und

$\forall n \in \mathbb{N} : n \in X \rightarrow n+1 \in X$

so $\forall n \in \mathbb{N} : n \in X$

Induktionssatz

Gelten die beiden Aussagen:

- $p(0)$ und
- $\forall n \in \mathbb{N} : p(n) \rightarrow p(n+1)$,

dann gilt auch $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

$\boxed{X = \{n \mid p(n)\}}$

Gelten die beiden Aussagen:

- $0 \in X$ und
- $\forall n \in \mathbb{N} : n \in X \rightarrow n+1 \in X$

dann gilt auch $\forall n \in \mathbb{N} : n \in X$.

# Induktion über die natürlichen Zahlen

(A5) Jede Menge $X$, die 0 und mit jeder natürlichen Zahl $n$ auch deren Nachfolger $S(n)$ enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen.

$$
\begin{array}{lll}
\forall X \text{ Menge:} & \text{Falls} & 0 \in X, \text{ und} \\
 & & \forall n \in \mathbb{N} : n \in X \to n+1 \in X \\
 & & \\
 & \text{so} & \forall n \in \mathbb{N} : n \in X
\end{array}
$$

Induktionssatz

Gelten die beiden Aussagen:

- $p(0)$ und
- $\forall n \in \mathbb{N} : p(n) \to p(n+1)$,

dann gilt auch $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

# Induktion über die natürlichen Zahlen

(A5) Jede Menge $X$, die 0 und mit jeder natürlichen Zahl $n$ auch deren Nachfolger $S(n)$ enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen.

$$\begin{array}{lll} \forall X \text{ Menge:} & \text{Falls} & 0 \in X, \text{ und} \\ & & \forall n \in \mathbb{N} : n \in X \to n+1 \in X \\ & & \\ & \text{so} & \forall n \in \mathbb{N} : n \in X \end{array}$$

Induktionssatz

Gelten die beiden Aussagen:

- $p(0)$ und — Induktionsbasis
- $\forall n \in \mathbb{N} : p(n) \to p(n+1)$, — Induktionsschritt

dann gilt auch $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

# Induktion über die natürlichen Zahlen

## Struktur eines Induktionsbeweises

| | | |
|---|---|---|
| (1) | Induktionsbasis: | Beweise $p(0)$ |
| (2) | Induktionsschritt: | Beweise $p(n) \rightarrow p(n+1)$ |
| | | für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ |

# Induktion über die natürlichen Zahlen

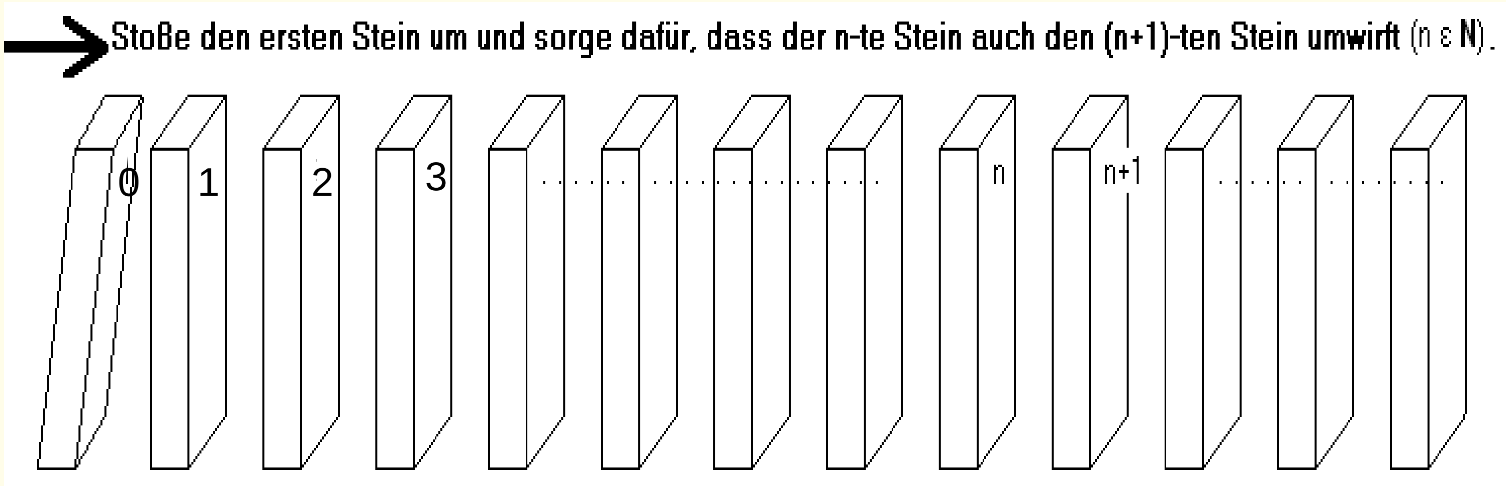
**Struktur eines Induktionsbeweises**

| | | |
|---|---|---|
| (1) | Induktionsbasis: | Beweise $p(0)$ |
| (2) | Induktionsvoraussetzung: | Für ein beliebig gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gilt $p(n)$ |
| (3) | Induktionsschluss: | Folgere $p(n+1)$ aus der Induktionsvoraussetzung $p(n)$ |

# Induktion über die natürlichen Zahlen

**Struktur eines Induktionsbeweises**

| | | |
|---|---|---|
| (1) | Induktionsbasis: | Beweise $p(0)$ |
| (2) | Induktionsvoraussetzung: | Für ein beliebig gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gilt $p(n)$ |
| (3) | Induktionsschluss: | Folgere $p(n+1)$ aus der Induktionsvoraussetzung $p(n)$ |



# Beispiel

Behauptung: Die Summe der ersten $n$ ungeraden Zahlen ist $n^2$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$.

# Beispiel

Behauptung: Die Summe der ersten $n$ ungeraden Zahlen ist $n^2$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$.

$$p(n): \quad \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$$

(1) Induktionsbasis: Beweise $p(0)$

$n = 0$: $0 = 0^2$

# Beispiel

Behauptung: Die Summe der ersten $n$ ungeraden Zahlen ist $n^2$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$.

$$p(n): \quad \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$$

(1) Induktionsbasis: Beweise $p(0)$ OK

(2) Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebig gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gilt $p(n)$: $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$

# Beispiel

Behauptung: Die Summe der ersten $n$ ungeraden Zahlen ist $n^2$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$.

$$p(n): \quad \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | Induktionsbasis: | Beweise $p(0)$ OK |
| (2) | Induktionsvoraussetzung: | Für ein beliebig gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gilt $p(n)$: $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$ |
| (3) | Induktionsschluss: | Folgere $p(n+1)$ aus $p(n)$ $p(n+1): \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$. |

Beweis: $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)) + (2n+1) \overset{p(n)}{=} n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$.

# Induktion über die natürlichen Zahlen

## Struktur eines Induktionsbeweises

Zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | Induktionsbasis: | Beweise $p(0)$ |
| (2) | Induktionsvoraussetzung: | Für ein beliebig gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gilt $p(n)$ |
| (3) | Induktionsschluss: | Folgere $p(n+1)$ aus der Induktionsvoraussetzung $p(n)$ |

# Induktion über die natürlichen Zahlen

## Struktur eines Induktionsbeweises

Zu zeigen: $\forall n \geq n_0 : p(n)$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | Induktionsbasis: | Beweise $p(n_0)$ |
| (2) | Induktionsvoraussetzung: | Für ein beliebig gewähltes $n \geq n_0$ gilt $p(n)$ |
| (3) | Induktionsschluss: | Folgere $p(n+1)$ aus der Induktionsvoraussetzung $p(n)$ |

# Verallgemeinerte vollständige Induktion

### Verallgemeinerte vollständige Induktion

Gelten die beiden Aussagen:

$$p(0) \quad \text{und}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : p(0) \wedge p(1) \wedge \cdots \wedge p(n) \rightarrow p(n+1)$$

dann gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

# Wohlfundierte (Noethersche) Induktion

## Verallgemeinerte vollständige Induktion

Gelten die beiden Aussagen:

$$p(0) \quad \text{und}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : p(0) \wedge p(1) \wedge \cdots \wedge p(n) \rightarrow p(n+1)$$

dann gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

## Äquivalent

Gelten die beiden Aussagen:

$$p(0) \quad \text{und}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : (k < n+1 \rightarrow p(k)) \rightarrow p(n+1))$$

dann gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

# Wohlfundierte (Noethersche) Induktion

## Verallgemeinerte vollständige Induktion

Gelten die beiden Aussagen:

$$p(0) \quad \text{und}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : p(0) \wedge p(1) \wedge \cdots \wedge p(n) \rightarrow p(n+1)$$

dann gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

## Äquivalent

Gilt die Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : (k < n \rightarrow p(k)) \rightarrow p(n))$$

dann gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

# Vollständige Induktion

Zu zeigen: $\forall n \geq n_0 : P(n)$

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Induktionsvoraussetzung: $p(k)$ gilt für alle $n_0 \leq k < n$

Induktionsschluss: Folgere $p(n)$ aus der Induktionsvoraussetzung.

# Wohlfundierte (Noethersche) Induktion

**Theorem:**

| | | |
|---|---|---|
| Falls | $\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : (k < n \to p(k)) \to p(n))$ | $P$ |
| dann gilt | $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$ | $Q$ |

Beweis: Zu zeigen: $P \to Q$

Kontrapositionsbeweis: Wir zeigen, dass $\neg Q \to \neg P$

Annahme: $\neg Q := \neg(\forall n \in \mathbb{N} : p(n)) \equiv \exists n \in \mathbb{N} : \neg p(n)$.

$>$ **wohlfundierte Ordnung auf $\mathbb{N}$:** es gibt keine unendliche Folge $x_1, \ldots, x_j, \ldots$ mit $x_1 > x_2 > \cdots > x_j > \ldots$.

Sei $Y = \{i \in \mathbb{N} \mid \neg p(i)\} \neq \emptyset$. Dann hat $Y$ ein minimales Element $m$, d.h. $\exists m(m \in Y \wedge (\forall k \in \mathbb{N} : (k < m \to k \notin Y)))$

# Wohlfundierte (Noethersche) Induktion

**Theorem:**

| | | |
|---|---|---|
| Falls | $\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : (k < n \rightarrow p(k)) \rightarrow p(n))$ | $P$ |
| dann gilt | $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$ | $Q$ |

Beweis: Zu zeigen: $P \rightarrow Q$

Kontrapositionsbeweis: Wir zeigen, dass $\neg Q \rightarrow \neg P$

Annahme: $\neg Q := \neg(\forall n \in \mathbb{N} : p(n)) \equiv \exists n \in \mathbb{N} : \neg p(n)$.

$>$ **wohlfundierte Ordnung auf** $\mathbb{N}$**:** es gibt keine unendliche Folge $x_1, \ldots, x_j, \ldots$ mit $x_1 > x_2 > \cdots > x_j > \ldots$.

Sei $Y = \{i \in \mathbb{N} \mid \neg p(i)\} \neq \emptyset$. Dann hat $Y$ ein minimales Element $m$, d.h. $\exists m(m \in Y \wedge (\forall k \in \mathbb{N} : (k < m \rightarrow k \notin Y)))$, also:

$\exists m(\neg p(m) \wedge (\forall k \in \mathbb{N} : (k < m \rightarrow p(k)))) = \neg P$

# Wohlfundierte (Noethersche) Induktion

**Theorem:**

| | | |
|---|---|---|
| Falls | $\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : (k < n \to p(k)) \to p(n))$ | $P$ |
| dann gilt | $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$ | $Q$ |

Beweis: Zu zeigen: $P \to Q$

Kontrapositionsbeweis: Wir zeigen, dass $\neg Q \to \neg P$

Annahme: $\neg Q := \neg(\forall n \in \mathbb{N} : p(n)) \equiv \exists n \in \mathbb{N} : \neg p(n)$.

$>$ **wohlfundierte Ordnung auf** $\mathbb{N}$**:** es gibt keine unendliche Folge $x_1, \ldots, x_j, \ldots$ mit $x_1 > x_2 > \cdots > x_j > \ldots$.

Sei $Y = \{i \in \mathbb{N} \mid \neg p(i)\} \neq \emptyset$. Dann hat $Y$ ein minimales Element $m$, d.h. $\exists m (m \in Y \wedge (\forall k \in \mathbb{N} : (k < m \to k \notin Y)))$, also:

$\exists m (\neg p(m) \wedge (\forall k \in \mathbb{N} : (k < m \to p(k)))) = \neg P$

# Wohlfundierte (Noethersche) Induktion

**Theorem:**

| | | |
|---|---|---|
| Falls | $\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : (k < n \to p(k)) \to p(n))$ | $P$ |
| dann gilt | $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$ | $Q$ |

Verallgemeinerung

- beliebige Menge $A$ statt $\mathbb{N}$

- $<$ Ordnung auf $A$

- $<$ wohlfundiert (es gibt keine unendliche Folge $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ mit $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \ldots$)

# Beispiel

**Satz:** Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.

$p(n)$: $n \geq 2 \rightarrow n$ lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.

# Beispiel

**Satz:** Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.
$p(n)$: $n \geq 2 \rightarrow n$ lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.

*Beweis:* Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ beliebig gewählt.

Induktionsvoraussetzung: $p(k)$ gilt für alle $k < n$
Induktionsschluss: Folgere $p(n)$ aus der Induktionsvoraussetzung

# Beispiel

**Satz:** Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.
$p(n)$: $n \geq 2 \rightarrow n$ lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.

*Beweis:* Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, beliebig gewählt.

Induktionsvoraussetzung: $p(k)$ gilt für alle $k < n$
Induktionsschluss: Folgere $p(n)$ aus der Induktionsvoraussetzung.

Fallunterscheidung:

**Fall 1:** $n$ **Primzahl.** Dann lässt sich $n$ als Produkt von Primzahlen darstellen $(n = n)$

**Fall 2:** $n$ **keine Primzahl.** Dann $n = k_1 \cdot k_2$, mit $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2 \geq 2$.
Da aber $k_i < n, i = 1, 2$ ist nach Induktionsvoraussetzung bereits eine Darstellung als Produkt von Primzahlen für $k_i$ bekannt.
Multipliziert man diese beiden Produkte miteinander, so erhält man eine Darstellung für $n$.

# Fehlerquellen

## Häufige Fehler bei Induktionsbeweisen

- Ordnung ist nicht noethersch
- Induktionsanfäng inkorrekt
- Bei Induktionsschritt die Grenzfälle nicht bedacht

# Fehlerquellen

Was ist hier falsch?

**Behauptung:** Alle Menschen haben die gleiche Haarfarbe

# Fehlerquellen

Was ist hier falsch?

**Behauptung:** Alle Menschen haben die gleiche Haarfarbe

$p(n)$ : In einer Menge von $n$ Menschen haben alle die gleiche Haarfarbe

# Fehlerquellen

Was ist hier falsch?

**Behauptung:** Alle Menschen haben die gleiche Haarfarbe

$p(n)$ : In einer Menge von n Menschen haben alle die gleiche Haarfarbe

Induktionbasis: $n = 1$

Für eine Menge mit nur einem Menschen gilt die Behauptung trivial

# Fehlerquellen

Was ist hier falsch?

**Behauptung:** Alle Menschen haben die gleiche Haarfarbe

$p(n)$ : In einer Menge von n Menschen haben alle die gleiche Haarfarbe

Induktionsvoraussetzung: $p(n)$ wahr.

Induktionsschritt: Beweise, dass aus $p(n)$, $p(n+1)$ folgt.

$n+1$ Menschen werden in eine Reihe gestellt.

Der Mensch links außen wird rausgeschickt.

Nun kann die Induktionsbehauptung angewendet werden und alle verbliebenen haben die gleiche Haarfarbe (mit dem rechts außen).

# Fehlerquellen

Was ist hier falsch?

**Behauptung:** Alle Menschen haben die gleiche Haarfarbe

$p(n)$ : In einer Menge von n Menschen haben alle die gleiche Haarfarbe

Induktionsvoraussetzung: $p(n)$ wahr.

Induktionsschritt: Beweise, dass aus $p(n)$, $p(n+1)$ folgt.

$n+1$ Menschen werden in eine Reihe gestellt.

Der Mensch rechts außen wird rausgeschickt.
Die Induktionsbehauptung kann angewendet werden und alle verbliebenen haben die gleiche Haarfarbe (mit dem links außen).

Also haben die beiden außen die gleiche Haarfarbe, wie die in der Mitte, und die haben auch alle die gleiche Haarfarbe

Also haben alle $n+1$ Menschen die gleiche Haarfarbe.

# Fehlerquellen

Was ist hier falsch?

Bei Induktionsschritt Grenzfall $n = 2$ nicht bedacht.

**Behauptung:** Alle Menschen haben die gleiche Haarfarbe

$p(n)$ : In einer Menge von n Menschen haben alle die gleiche Haarfarbe

Induktionsvoraussetzung: $p(n)$ wahr.

Induktionsschritt: Beweise, dass aus $p(n)$, $p(n+1)$ folgt.

$n + 1$ Menschen werden in eine Reihe gestellt.

Der Mensch rechts außen wird rausgeschickt.
Die Induktionsbehauptung kann angewendet werden und alle verbliebenen haben die gleiche Haarfarbe (mit dem links außen).

Also haben die beiden außen die gleiche Haarfarbe, wie die in der Mitte, und die haben auch alle die gleiche Haarfarbe

Also haben alle $n + 1$ Menschen die gleiche Haarfarbe.

# Fehlerquellen

Was ist hier falsch?

### Paradox des Haufens

Wir gehen davon aus, dass jede Menge mit mehr als 100.000 Sandkörner ein Haufen Sand bildet.

**Axiom:** Wenn wir von einem Haufen Sand ein Sandkorn entfernen, dann bilden die restlichen Sandkörner weiterhin einen Haufen.

# Fehlerquellen

Was ist hier falsch?

**Paradox des Haufens**

Wir gehen davon aus, dass jede Menge mit mehr als 100.000 Sandkörner ein Haufen Sand bildet.

**Axiom:** Wenn wir von einem Haufen Sand ein Sandkorn entfernen, dann bilden die restlichen Sandkörner weiterhin einen Haufen.

Somit lässt sich folgern:

Wenn $n$ Körner ein Haufen sind, dann sind $(n-1)$ Körner ein Haufen;
$n-1$ Körner sind ein Haufen, also sind $n-2$ ein Haufen;
Wenn $(n-(n-2))$ Körner ein Haufen sind, dann ist 1 Korn ein Haufen.

Letztendlich gelangen wir so zu der Aussage, dass bereits ein Sandkorn ein Haufen ist.

# Fehlerquellen

Was ist hier falsch?

Falsch:

Das Axiom und die Definition des Begriffs “Haufen” passen nicht zusammen.

## Paradox des Haufens

Wir gehen davon aus, dass jede rner ein Haufen Sand bildet.

**Axiom:** Wenn wir von einem Haufen Sand ein Sandkorn entfernen, dann bilden die restlichen Sandkörner weiterhin einen Haufen.

Somit lässt sich folgern:

Wenn $n$ Körner ein Haufen sind, dann sind $(n-1)$ Körner ein Haufen;
$n-1$ Körner sind ein Haufen, also sind $n-2$ ein Haufen;
Wenn $(n-(n-2))$ Körner ein Haufen sind, dann ist 1 Korn ein Haufen.

Letztendlich gelangen wir so zu der Aussage, dass bereits ein Sandkorn ein Haufen ist.

# Zusammenfassung

- Grundlegende Beweisstrategien
- Induktion über die natürlichen Zahlen
- Fehlerquellen