Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 3

15.06.2021

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Prädikatenlogik

Syntax

1. **Logische Symbole:**
   1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top, \bot; \neg; \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
   1.2: Quantoren: $\forall$, $\exists$.

2. **Nichtlogische Symbole:** Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,
   2.1: Ω Menge von Funktionssymbolen. Notation: f/n: f hat Stelligkeit $n \geq 0$,
   2.2: Π Menge von Prädikatensymbolen. Notation: p/m: p hat Stelligkeit $m \geq 0$.
   (Das Gleichheitsprädikat $\approx$ kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

   Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstanten.

   Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen.

3. **Variablen:** X vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen, die wir für (die Bezeichnung von) Variablen verwenden.

Bis jetzt

Prädikatenlogik

- Syntax
  - Signatur
  - Terme
  - Formeln
  - Substitutionen
- Semantik
  - Σ-Struktur
  - Valuation (über einer Σ-Struktur $\mathcal{A}$)
  - Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β
  - Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Modelle, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Definition. F gilt in $\mathcal{A}$ unter β:

$$\mathcal{A}, \beta \models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A}(\beta)(F) = 1$$

Definition. F gilt in $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ ist Modell von F):

$$\mathcal{A} \models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta \models F, \text{ für alle } \beta : X \to U_{\mathcal{A}}$$

Definition. F ist (allgemein-) gültig:

$$\models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A} \models F, \text{ für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str}$$

Definition. F heißt erfüllbar gdw. es $\mathcal{A}$ und β gibt, so dass $\mathcal{A}, \beta \models F$.
Sonst heißt F unerfüllbar.

Folgerung und Äquivalenz

Definition. F impliziert G (oder G folgt aus F), i.Z. $F \models G$
gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ gilt:
Falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Definition. F und G sind äquivalent
gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ gilt:
$\mathcal{A}, \beta \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise:

Definition. $N \models G$ gdw.
für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$:
falls ($\mathcal{A}, \beta \models F$, für alle $F \in N$), so ($\mathcal{A}, \beta \models G$).

Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

Satz. $F \models G$ gdw. $(F \rightarrow G)$ ist gültig

Satz. F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

Satz. $F \models G$ gdw. $(F \rightarrow G)$ ist gültig

Beweis

$F \models G$ gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$: Falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.

gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}(\beta)(F) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G) = 1$

gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}(\beta)(F \rightarrow G) = 1$

Satz. F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

Satz. $F \models G$ gdw. $(F \to G)$ ist gültig

Beweis

$F \models G$	gdw.	für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$: Falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.
	gdw.	für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}(\beta)(F) \to_b \mathcal{A}(\beta)(G) = 1$
	gdw.	für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}(\beta)(F \to G) = 1$

Satz. F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Beweis

F und G sind äquivalent	gdw.	$F \models G$ und $F \models G$
	gdw.	$\models F \to G$ und $\models G \to F$
	gdw.	$\models F \leftrightarrow G$

Gültigkeit und Unerfüllbarkeit

Nachweis von Gültigkeit (und damit Folgerung oder Äquivalenz) durch Unerfüllbarkeitstest:

F gültig genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar

$N \models F$ genau dann, wenn $N \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$ ist das gleiche wie $\forall y \forall x$

$\exists x \exists y$ ist das gleiche wie $\exists y \exists x$

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$ ist das gleiche wie $\forall y \forall x$

$\exists x \exists y$ ist das gleiche wie $\exists y \exists x$

Informell: Für jede Formel F gilt: $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$; $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$.

Theorem

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

(1) $\quad \forall x \forall y\, F \equiv \forall y \forall x\, F$

(2) $\quad \exists x \exists y\, F \equiv \exists y \exists x\, F$

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

Theorem

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

(1) $\forall x \forall y\, F \equiv \forall y \forall x\, F$

(2) $\exists x \exists y\, F \equiv \exists y \exists x\, F$

Beweis: (1) Zu zeigen: Für alle $\mathcal{A}$ und $\beta : X \to U_\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A}(\beta)(\forall x \forall y F) = 1 \text{ genau dann, wenn } \mathcal{A}(\beta)(\forall y \forall x F) = 1$$

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{A}(\beta)(\forall x \forall y F) & = & \min_{a \in U_\mathcal{A}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(\forall y F) \\ & = & \min_{a \in U_\mathcal{A}} \min_{b \in U_\mathcal{A}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(F) \\ \mathcal{A}(\beta)(\forall y \forall x F) & = & \min_{b \in U_\mathcal{A}} \min_{a \in U_\mathcal{A}} \mathcal{A}(\beta[y \mapsto b, x \mapsto a])(F) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}(\beta)(\forall x \forall y F) = 1 & \text{gdw.} & \text{Für alle } a, b \in U_\mathcal{A}, \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(F) = 1 \\ & \text{gdw.} & \mathcal{A}(\beta)(\forall y \forall x F) = 1 \end{array}$$

(2) Analog.

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Beispiel:

$\forall x \exists y \quad Mutter(y, x)$ Jeder hat eine Mutter (richtig)

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Beispiel:

$\forall x \exists y \quad Mutter(y, x)$ Jeder hat eine Mutter (richtig)

$\exists y \forall x \quad Mutter(y, x)$ Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist (falsch)

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Beispiel:

$\forall x \exists y \; Mutter(y, x)$	Jeder hat eine Mutter	(richtig)
$\exists y \forall x \; Mutter(y, x)$	Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist	(falsch)

Bemerkung: $\forall x \exists y F \equiv \exists y \forall x F$ gilt nicht immer.
Es gibt eine Formel F so dass $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ nicht logisch äquivalent.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

$$\exists x \forall y \, F \models \forall y \exists x \, F$$

Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und eine Formel F mit:

$$\forall x \exists y \, F \not\models \exists y \forall x \, F$$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

$$\exists x \forall y\, F \models \forall y \exists x\, F$$

Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und eine Formel F mit:

$$\forall x \exists y\, F \not\models \exists y \forall x\, F$$

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ Σ-Struktur und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$.

Annahme: $\mathcal{A}(\beta)(\exists x \forall y\, F) = 1$. Zu zeigen: $\mathcal{A}(\beta)(\forall y \exists x\, F) = 1$.

$\mathcal{A}(\beta)(\exists x \forall y\, F) = \max_{a \in U_{\mathcal{A}}} \min_{b \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(F) = 1$

$\Rightarrow$ Es gibt ein $a_0 \in U_{\mathcal{A}}$ sodass für alle $b \in U_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a_0, y \mapsto b])(F) = 1$.

$\mathcal{A}(\beta)(\forall y \exists x\, F) = \min_{b \in U_{\mathcal{A}}} \max_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(F)$.

Sei $b \in U_{\mathcal{A}}$.
$\max_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(F) = 1$, da $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a_0, y \mapsto b])(F) = 1$.

Also: $\mathcal{A}(\beta)(\forall y \exists x\, F) = 1$.

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

$$\exists x \forall y\, F \models \forall y \exists x\, F$$

Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und eine Formel F mit:

$$\forall x \exists y\, F \not\models \exists y \forall x\, F$$

Beweis:

$\Sigma = (\{1/0, +/2\}, \{\approx /2\})$

$F = (y \approx x + 1)$

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, (1_{\mathcal{A}} = 1 \in \mathbb{N}, +_{\mathcal{A}} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}), \{\approx_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}^2\})$

$$+_{\mathcal{A}} (n_1, n_2) = n_1 + n_2 \in \mathbb{N} \qquad \approx_{\mathcal{A}} = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$\mathcal{A}(\beta)(\forall x \exists y (y \approx x + 1)) = 1$ für alle $\beta : X \to \mathbb{N}$

$\mathcal{A}(\beta)(\exists y \forall x\, (y \approx x + 1)) = 0$ für alle $\beta : X \to \mathbb{N}$.

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg \exists x \neg \ldots$

$\exists x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg \forall x \neg \ldots$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\exists x \neg \ldots$

$\exists x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\forall x \neg \ldots$

Beispiel:

$\forall x\, \mathrm{mag}(x, \mathrm{eiscreme})$ ist das gleiche wie $\neg\exists x\, \neg\mathrm{mag}(x, \mathrm{eiscreme})$

$\exists x\, \mathrm{mag}(x, \mathrm{broccoli})$ ist das gleiche wie $\neg\forall x\, \neg\mathrm{mag}(x, \mathrm{broccoli})$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\exists x \neg \ldots$

$\exists x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\forall x \neg \ldots$

Beispiel:

$\forall x\, \text{mag}(x, \text{eiscreme})$ ist das gleiche wie $\neg\exists x\, \neg\text{mag}(x, \text{eiscreme})$

$\exists x\, \text{mag}(x, \text{broccoli})$ ist das gleiche wie $\neg\forall x\, \neg\text{mag}(x, \text{broccoli})$

Informell: Für jede Formel F gilt: $\forall x F \equiv \neg\exists x \neg F$; $\exists x F \equiv \neg\forall x \neg F$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

(1) $\forall x\, F \equiv \neg\exists x\, \neg F$

(2) $\exists x\, F \equiv \neg\forall x\, \neg F$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

(1) $\quad \forall x\, F \equiv \neg \exists x\, \neg F$

(2) $\quad \exists x\, F \equiv \neg \forall x\, \neg F$

Beweis: (1) Zu zeigen: Für alle $\mathcal{A}, \beta$: $\mathcal{A}(\beta)(\forall x\, F) = \mathcal{A}(\beta)(\neg \exists x\, \neg F)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\beta)(\forall x\, F) = 1 \ &\text{gdw. für alle } a \in U_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \\
&\text{gdw. es gibt keinen } a \in U_{\mathcal{A}} \text{ mit } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 0 \\
&\text{gdw. es gibt keinen } a \in U_{\mathcal{A}} \text{ mit } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(\neg F) = 1 \\
&\text{gdw. es ist nicht wahr dass (es gibt } a \in U_{\mathcal{A}} \text{ mit } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(\neg F) = 1) \\
&\text{gdw. es ist nicht wahr dass } (\mathcal{A}(\beta)(\exists x \neg F) = 1) \\
&\text{gdw. } \mathcal{A}(\beta)(\exists x \neg F) = 0 \text{ gdw. } \mathcal{A}(\beta)(\neg \exists x \neg F) = 1.
\end{aligned}$$

(2) Analog.

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x(\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x(\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\,(\mathit{studiert}(x) \wedge \mathit{arbeitet}(x))$ ist das gleiche wie

$(\forall x\,\mathit{studiert}(x)) \wedge (\forall x\,\mathit{arbeitet}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x(\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\,(\mathit{studiert}(x) \wedge \mathit{arbeitet}(x))$ ist das gleiche wie

$(\forall x\, \mathit{studiert}(x)) \wedge (\forall x\, \mathit{arbeitet}(x))$

Informell: Für alle Formeln F, G gilt: $\forall x(F \wedge G) \equiv \forall xF \wedge \forall xG$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F, G gilt:

$$\forall x(F \wedge G) \equiv \forall xF \wedge \forall xG$$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F, G gilt:

$$\forall x(F \wedge G) \equiv \forall xF \wedge \forall xG$$

Beweis: Zu zeigen: Für alle $\mathcal{A}$, β: $\mathcal{A}(\beta)(\forall x(F \wedge G)) = \mathcal{A}(\beta)(\forall xF \wedge \forall xG)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\beta)(\forall x(F \wedge G)) = 1 \text{ gdw. } & \min_{a \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F \wedge G) = 1 \\
\text{gdw. } & \text{Für alle } a \in U_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F \wedge G) = 1 \\
\text{gdw. } & \text{Für alle } a \in U_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(G) = 1 \\
\text{gdw. } & \text{Für alle } a \in U_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ und} \\
& \quad \text{für alle } a \in U_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(G) = 1 \\
\text{gdw. } & \min_{a \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ und} \\
& \quad \min_{a \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(G) = 1 \\
\text{gdw. } & \mathcal{A}(\beta)(\forall xF) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(\beta)(\forall xG) = 1 \\
\text{gdw. } & \mathcal{A}(\beta)(\forall xF \wedge \forall xG) = 1
\end{aligned}$$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\vee$

$\exists x(\ldots \vee \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\vee$

$\exists x(\ldots \vee \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\, (\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist das gleiche wie

$(\exists x\, \mathit{gerade}(x)) \vee (\exists x\, \mathit{ungerade}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\vee$

$\exists x(\ldots \vee \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\,(gerade(x) \vee ungerade(x))$ ist das gleiche wie

$(\exists x\; gerade(x)) \vee (\exists x\; ungerade(x))$

Informell: Für alle Formeln F, G gilt: $\exists x(F \vee G) \equiv \exists xF \vee \exists xG$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F, G gilt:

$$\exists x\,(F \vee G) \equiv (\exists x\, F) \vee (\exists x\, G)$$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x(\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x(\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\,(\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie

$(\forall x\, \mathit{gerade}(x)) \vee (\forall x\, \mathit{ungerade}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x(\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\, (\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie

$(\forall x\, \mathit{gerade}(x)) \vee (\forall x\, \mathit{ungerade}(x))$

Theorem. Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und Σ-Formeln F, G mit:

$$\forall x(F \vee G) \not\equiv \forall x F \vee \forall x G$$

(1) $\forall x F \vee \forall x G \models \forall x(F \vee G)$
(2) $\forall x(F \vee G) \not\models \forall x F \vee \forall x G$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

Theorem. Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und Σ-Formeln F, G mit:

$$\forall x(F \vee G) \not\equiv \forall xF \vee \forall xG$$

(1) $\forall xF \vee \forall xG \models \forall x(F \vee G)$
(2) $\forall x(F \vee G) \not\models \forall xF \vee \forall xG$

Beweis: (1) Zu zeigen: Für alle $\mathcal{A}$, β:
Wenn $\mathcal{A}(\beta)(\forall xF \vee \forall xG) = 1$, dann $\mathcal{A}(\beta)(\forall x(F \vee G)) = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\beta)(\forall xF \vee \forall xG) = 1 \quad & \Rightarrow \quad \mathcal{A}(\beta)(\forall xF) \vee \mathcal{A}(\beta)(\forall xG) = 1 \\
& \Rightarrow \quad \mathcal{A}(\beta)(\forall xF) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}(\beta)(\forall xG) = 1 \\
& \Rightarrow \quad \text{Für alle } a \in U_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ oder} \\
& \qquad\ \ \text{für alle } a \in U_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(G) = 1 \\
& \Rightarrow \quad \text{Für alle } a \in U_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F \vee G) = 1 \\
& \Rightarrow \quad \mathcal{A}(\beta)(\forall x(F \vee G)) = 1.
\end{aligned}$$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

Theorem. Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und Σ-Formeln F, G mit:

$$\forall x(F \vee G) \not\equiv \forall xF \vee \forall xG$$

(1) $\forall xF \vee \forall xG \models \forall x(F \vee G)$
(2) $\forall x(F \vee G) \not\models \forall xF \vee \forall xG$

Beweis: (2) Zu zeigen: Es gibt F, G, $\mathcal{A}$, β mit

$$\mathcal{A}(\beta)(\forall x(F \vee G)) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(\beta)(\forall xF \vee \forall xG) = 0.$$

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, gerade/1, underade/1 $\in \Pi$

$\mathcal{A}$ mit $U_\mathcal{A} = \mathbb{N}$, $\quad \text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, 6, ...\} \quad \text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 2, 5, 7, ...\}$.

$\mathcal{A}(\beta)(\forall x(\text{gerade}(x) \vee \text{ungerade}(x))) = 1$

$\mathcal{A}(\beta)((\forall x\, \text{gerade}(x)) \vee (\forall x\, \text{ungerade}(x))) = 0$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \ldots) \wedge (\exists x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \ldots) \wedge (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\,(\mathit{gerade}(x) \wedge \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie
$(\exists x\, \mathit{gerade}(x)) \wedge (\exists x\, \mathit{ungerade}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \ldots) \wedge (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\,(\mathit{gerade}(x) \wedge \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie
$(\exists x\, \mathit{gerade}(x)) \wedge (\exists x\, \mathit{ungerade}(x))$

Theorem. Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und Σ-Formeln F, G mit:

$$\exists x(F \wedge G) \not\equiv \exists x F \wedge \exists x G$$

(1) $\exists x(F \wedge G) \models \exists x F \wedge \exists x G$
(2) $\exists x F \wedge \exists x G \not\models \exists x(F \wedge G)$

Zusammenfassung

Wichtige Äquivalenzen

- $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
- $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$
- $\forall x (F \wedge G) \equiv (\forall x F) \wedge (\forall x G)$
- $\exists x (F \vee G) \equiv (\exists x F) \vee (\exists x G)$
- $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F \qquad \neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
- $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F \qquad \neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

Wichtige Äquivalenzen (Zusammenfassung)

- $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
- $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$
- $\forall x(F \wedge G) \equiv (\forall x F) \wedge (\forall x G)$
- $\exists x(F \vee G) \equiv (\exists x F) \vee (\exists x G)$
- $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$ $\qquad \neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
- $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$ $\qquad \neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

Falls x in der Formel H nicht vorkommt, dann:

- $(\forall x F(x)) \vee H \equiv \forall x(F(x) \vee H)$
- $(\forall x F(x)) \wedge H \equiv \forall x(F(x) \wedge H)$
- $(\exists x F(x)) \vee H \equiv \exists x(F(x) \vee H)$
- $(\exists x F(x)) \wedge H \equiv \exists x(F(x) \wedge H)$

Zusammenfassung

Aber Vorsicht

$\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$

- $\exists y \forall x F \models \forall x \exists y F$
- $\forall x \exists y F \not\models \exists y \forall x F$

$\forall x (F \vee G) \not\equiv (\forall x F) \vee (\forall x G)$

- $(\forall x F) \vee (\forall x G) \models \forall x (F \vee G)$
- $\forall x (F \vee G) \not\models \forall x F \vee \forall x G$

$\exists x (F \wedge G) \not\equiv (\exists x F) \wedge (\exists x G)$

- $\exists x (F \wedge G) \models (\exists x F) \wedge (\exists x G)$
- $(\exists x F) \wedge (\exists x G) \not\models \exists x (F \wedge G)$

Andere wichtige Äquivalenzen

$(F \wedge F) \equiv F$	$(F \vee F) \equiv F$	(Idempotenz)
$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$	$(F \vee G) \equiv (G \vee F)$	(Kommutativität)
$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$ $(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H)$		(Assoziativität)
$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$ $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$		(Absorption)
$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$		(Distributivität)
$(\neg\neg F) \equiv F$		(Doppelte Negation)
$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$		(De Morgan's Regeln)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$		(Kontraposition)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$ $F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$		(Elimination Implikation) (Elimination Äquivalenz)

Strukturelle Induction

- für Terme
- für Formeln in Prädikatenlogik

Strukturelle Induktion: Terme

Menge $T_\Sigma(X)$ der Σ-Terme:

Die kleinste Menge mit:

- $X \subseteq T_\Sigma(X)$
- Wenn
  - $f \in \Omega$,
  - n ist die Stelligkeit von f
  - $t_1, \dots, t_n \in T_\Sigma(X)$

  dann $f(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma(X)$

Strukturelle Induktion: Terme

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

Sei $p(t)$ eine Eigenschaft der Σ-Terme in Prädikatenlogik

Zu zeigen: Für alle Terme t, $p(t)$ gilt

Beweis durch strukturelle Induktion:

Induktionsbasis: Zu zeigen:
$p(t)$ gilt für $t \in X$ und für alle Konstanten.

Sei t ein Term (nicht Variable oder Konstante).
Induktionsvoraussetzung:
$p(s)$ gilt für alle Teilterme s von t (mit $s \neq t$)

Induktionsschritt: Zu zeigen: $p(t)$ gilt:

Fallunterschied über alle $f \in \Omega$ mit $t = f(t_1, \dots, t_n)$.

Strukturelle Induktion: Formeln

Menge For_Σ der Formeln über Σ:

Die kleinste Menge, die

- Alle atomaren Formeln enthält,
- $\top \in \mathrm{For}_\Sigma$, $\bot \in \mathrm{For}_\Sigma$,
- Wenn $F, G \in \mathrm{For}_\Sigma$, dann auch $\neg F, F \wedge G, F \vee G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G \in \mathrm{For}_\Sigma$,
- Wenn $F \in \mathrm{For}_\Sigma$ und $x \in X$, dann $\forall x F \in \mathrm{For}_\Sigma, \exists x F \in \mathrm{For}_\Sigma$

Strukturelle Induktion: Formeln

Sei $p(F)$ eine Eigenschaft der Σ-Formeln in Prädikatenlogik

Zu zeigen: Für alle Formeln F, $p(F)$ gilt

Beweis durch strukturelle Induktion:

Induktionsbasis: Zu zeigen:
$p(F)$ gilt für $F \in \{\top, \bot\}$ und für alle atomaren Formeln.

Sei F eine Formel (nicht atomar oder $\top$ oder $\bot$).
Induktionsvoraussetzung:
$p(G)$ gilt für alle Teilformeln G von F (mit $G \neq F$)

Induktionsschritt: Zu zeigen: $p(F)$ gilt:

Fall 1	$F = \neg G$	Fall 2	$F = G_1 \vee G_2$
Fall 3	$F = G_1 \wedge G_2$	Fall 4	$F = G_1 \rightarrow G_2$
Fall 5	$F = G_1 \leftrightarrow G_2$	Fall 6	$F = \forall x G$
		Fall 7	$F = \exists x G$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(F) \\
F[t/x] \arrow[r] & \mathcal{A}(\beta)(F[t/x])
\end{tikzcd}$$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: Strukturelle Induktion

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: Strukturelle Induktion

Plan: Wir benutzen folgendes Lemma:

Lemma: Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Variable x und Terme t_i, t:
$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$

Substitutionen und Valuationen

Lemma: Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Variable x und Terme t_i, t:
$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$

Beweis Strukturelle Induktion

$$p(t_i) \quad \mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$$

Zu zeigen: Für alle Terme t_i, $p(t_i)$ gilt.

1. **Induktionsbasis:** $p(t_i)$ gilt für $t_i \in X$ und für $t_i = c$ Konstante.

Fall 1: $t_i \in X$.

- Fall 1a: $t_i = x$. Dann: $t_i[t/x] = t$.
  $\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(t) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(x) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$.
- Fall 1a: $t_i = y$, mit $y \neq x$. Dann: $t_i[t/x] = y$
  $\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(y) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(y) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$.

Fall 2: $t_i = c$, $c/0 \in \Omega$ (Konstante). Dann: $t_i[t/x] = c$
$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(c) = c_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(c) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$.

Substitutionen und Valuationen

Lemma: Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β,
Variable x und Terme t_i, t:
$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$

Beweis (ctd.)

2. **Induktionsvoraussetzung:** Sei t_i Term (nicht Variable oder Konstante).

   Annahme: $p(s)$ gilt für alle Teilterme s von t_i (mit $s \neq t_i$)

3. **Induktionsschritt:** Zu zeigen: $p(t_i)$ gilt, wobei $t_i = f(s_1, \dots, s_n)$.

$$
\begin{array}{rcll}
\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) & = & \mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \dots, s_n)[t/x]) = & \\
 & = & \mathcal{A}(\beta)(f(s_1[t/x], \dots, s_n[t/x]) = & \text{(Anw. Subst.)} \\
 & = & f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1[t/x]), \dots, \mathcal{A}(\beta)(s_n[t/x])) & \\
 & \overset{IV}{=} & f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(s_1), \dots \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(s_n)) & \\
 & = & \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(f(s_1, \dots, s_n)) & \\
 & = & \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i) &
\end{array}
$$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \ \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: Strukturelle Induktion

1. Induktionsbasis: Zu zeigen: Die Eigenschaft gilt für $\top$, $\bot$ und alle atomaren Formeln.

Fall 1: $F = \top$ Dann $F[t/x] = \top$;

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(\top) = 1 = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\top) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(F)$

Fall 2: $F = \bot$ Dann $F[t/x] = \bot$;

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(\bot) = 0 = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\bot) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(F)$.

Fall 3: $F = p(t_1, \dots, t_n)$ mit $p/n \in \Pi$. Dann $F[t/x] = p(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$.

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(p(t_1[t/x], .., t_n[t/x])) = 1$ iff $(\mathcal{A}(\beta)(t_1[t/x]), .., \mathcal{A}(\beta)(t_n[t/x])) \in p_{\mathcal{A}}$

$\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(p(t_1, .., t_n)) = 1$ iff $(\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_1), .., \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_n)) \in p$

Lemma: $\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$. Äquivalenz folgt daraus.

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: ctd.

2. Induktionsvoraussetzung: Sei F eine Formel (nicht atomar oder $\top$ oder $\perp$).
Annahme: $p(G)$ gilt für alle Teilformeln G von F (mit $G \neq F$)

3. Induktionsschritt: Zu zeigen: $p(F)$ gilt:

Fall 1: $F = \neg G$. Dann $F[t/x] = \neg(G[t/x])$.

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(\neg(G[t/x]) = 1$ iff $\mathcal{A}(\beta)(G[t/x]) = 0$ iff (Ind.Voraus.)
$\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G)=0$ iff $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\neg G)=1$ iff $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(F)=1$

Fall 2-5: $F = G_1 \text{op} G_2$, $\text{op} \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Dann $F[t/x] = G_1[t/x]\text{op}G_2[t/x]$.
$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(G_1[t/x]\text{op}G_2[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(G_1[t/x])\text{op}_B\mathcal{A}(\beta)(G_2[t/x]) =$ (I.V.)
$\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G_1)\text{op}_B\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G_2) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\underbrace{G_1 \text{op} G_2}_{F})$.

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Fall 6: $F = \forall y G$.

Fall 6.1: $y = x$. Dann $F[t/x] = \forall x G[t/x] = \forall x G$.

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x])=\mathcal{A}(\beta)(\forall x G)=\min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(G) \mid a \in U_\mathcal{A}\}$

$\mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(\forall x G)=\min\{\mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)][x\mapsto a])(G) \mid a \in U_\mathcal{A}\} =$
$\quad\min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(G) \mid a \in U_\mathcal{A}\}$.

Fall 6.2: $y \neq x$, t enthält nicht y. Dann $F[t/x] = \forall y G[t/x] = \forall y (G[t/x])$.

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x])=\mathcal{A}(\beta)(\forall y(G[t/x])=\min\{\mathcal{A}(\beta[y\mapsto a])(G[t/x])|a\in U_\mathcal{A}\} =$ (Ind.Vor.)

$\min\{\mathcal{A}(\beta[y\mapsto a, x\mapsto \mathcal{A}(\beta[y\mapsto a])(t))(G)|a\in U_\mathcal{A}\}=$
$\quad\min\{\mathcal{A}(\beta[y\mapsto a, x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(G)|a\in U_\mathcal{A}\}$ (y kommt in t nicht vor)

$\mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(\forall y G)= = \min\{\mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)][y\mapsto a])(G)|a\in U_\mathcal{A}\}=$
$\quad\min\{\mathcal{A}(\beta[y \mapsto a, x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(G) = |a\in U_\mathcal{A}\}$.

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Fall 6: $F = \forall y G$.

Fall 6.3: $y \neq x$, t enthält y. Dann $F[t/x] = \forall y' G[y'/y][t/x]$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) &= \mathcal{A}(\beta)(\forall y'(G[y'/y][t/x]) = \\
&= \min\{\mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a])(G[y'/y][t/x]) \mid a \in U_{\mathcal{A}}\} = && \text{(Ind.Vor.)}\\
&= \min\{\mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a])(t))(G[y'/y]) \mid a \in U_{\mathcal{A}}\} = && \text{(Ind.Vor.)}\\
&= \min\{\mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a])(t), y \mapsto a])(G) \mid a \in U_{\mathcal{A}}\} \;=\\
&\qquad [\text{Rem:} \mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a])(t)])(y') = a]\\
&= \min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t), y \mapsto a])(G) \mid a \in U_{\mathcal{A}}\} && (y' \text{ kommt in } t \text{ u. } G \text{ nicht vor}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\forall y G) &= \min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)][y \mapsto a])(G) \mid a \in U_{\mathcal{A}}\} = \\
&= \min\{\mathcal{A}(\beta[y \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G) \mid a \in U_{\mathcal{A}}\}.
\end{aligned}$$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Fall 7: $F = \exists y G$.
Ähnlich zu Fall 6.

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Allgemeiner gilt für beliebige Substitutionen σ:

Theorem.

$$\mathcal{A}, \beta \models F\sigma \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta \circ \sigma \models F,$$

wobei $\beta \circ \sigma : X \to \mathcal{A}$ die Wertebelegung mit $\beta \circ \sigma(x) = \mathcal{A}(\beta)(x\sigma)$, für alle Variablen x.

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \quad \text{g.d.w.} \ \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Allgemeiner gilt für beliebige Substitutionen σ:

Theorem.

$$\mathcal{A}, \beta \models F\sigma \quad \text{g.d.w.} \ \mathcal{A}, \beta \circ \sigma \models F,$$

wobei $\beta \circ \sigma : X \to \mathcal{A}$ die Wertebelegung mit $\beta \circ \sigma(x) = \mathcal{A}(\beta)(x\sigma)$, für alle Variablen x.

Beweis: $\sigma = [t_1/x_1, \ldots t_n/x_n]$
Induktion nach Anzahl n von Variablen in $dom(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$

Umbenennung von Variablen

Lemma

Für alle Σ-Formeln F, Variablen x gilt:

$$\forall x\, F \equiv \forall z\, F[z/x]$$

wobei z eine neue Variable ist.

Umbenennung von Variablen

Lemma

Für alle Σ-Formeln F, Variablen x gilt:

$$\forall x\, F \equiv \forall z\, F[z/x]$$

wobei z eine neue Variable ist.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ eine Σ-Struktur und β eine Valuation.

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{A}(\forall x\, F) & = & \min_{a \in U_\mathcal{A}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) \\
\mathcal{A}(\forall z\, F[z/x]) & = & \min_{a \in U_\mathcal{A}} \mathcal{A}(\beta[z \mapsto a])(F[z/x]) \\
& = & \min_{a \in U_\mathcal{A}} \mathcal{A}(\beta[z \mapsto a][x \mapsto \mathcal{A}(\beta[z \mapsto a])(z)])(F) \\
& = & \min_{a \in U_\mathcal{A}} \mathcal{A}(\beta[z \mapsto a][x \mapsto a])(F) \\
& = & \min_{a \in U_\mathcal{A}} \mathcal{A}(\beta[z \mapsto a, x \mapsto a])(F) \\
& = & \min_{a \in U_\mathcal{A}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) \quad z \text{ kommt in } F \text{ nicht vor} \\
& = & \mathcal{A}(\forall x\, F)
\end{array}$$

Zusammenfassung: Syntax und Semantik

- Prädikatenlogische Signatur
- Term, Atom, Formel
- Prädikatenlogisches Modell
- Auswertung von Formeln in Modellen
- Erfüllbarkeit, Gültigkeit; Folgerung, Äquivalenz
- Eigenschaften von Quantoren (Vertauschbarkeit untereinander und mit $\wedge, \vee$)
- Substitutionslemma