Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 4

17.06.2021

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt: Syntax und Semantik

- Prädikatenlogische Signatur
- Term, Atom, Formel
- Prädikatenlogisches Modell
- Auswertung von Formeln in Modellen
- Erfüllbarkeit, Gültigkeit; Folgerung, Äquivalenz
- Eigenschaften von Quantoren (Vertauschbarkeit untereinander und mit $\wedge, \vee$)
- Substitutionslemma

Algorithmische Probleme

Gültigkeit(F):

$\models F$? (Σ fest)

Erfüllbarkeit(F):

F erfüllbar? (Σ fest)

Modelltest(F,A):

$A \models F$? (Σ fest)

Ausblick: Kalküle, Entscheidbarkeit

Kalküle

Es gibt korrekte und vollständige Kalküle für Prädikatenlogik
(z.B. Resolution, Tableaux)

Ausblick: Kalküle, Entscheidbarkeit

Kalküle

Es gibt korrekte und vollständige Kalküle für Prädikatenlogik
(z.B. Resolution, Tableaux)

Aber diese Kalküle können die Erfüllbarkeit von Formeln NICHT entscheiden

Ausblick: Kalküle, Entscheidbarkeit

Kalküle

Es gibt korrekte und vollständige Kalküle für Prädikatenlogik
(z.B. Resolution, Tableaux)

Aber diese Kalküle können die Erfüllbarkeit von Formeln NICHT entscheiden

Aussagenlogik

Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit ENTSCHEIDBAR

Prädikatenlogik

- Es gibt Σ, so dass Gültigkeit(F) unentscheidbar.
- Menge der allgemeingültigen Formeln REKURSIV AUFZÄHLBAR
- Menge der unerfüllbaren Formeln REKURSIV AUFZÄHLBAR
- Menge der erfüllbaren Formeln NICHT REKURSIV AUFZÄHLBAR

Rekursiv Aufzählbar

Informelle Definition. Als rekursiv aufzählbare Menge

(auch semi-entscheidbare Menge, positiv semi-entscheidbare Menge, halb-entscheidbare Menge, berechenbar aufzählbare Menge, kurz r.e., c.e)

wird in der Berechenbarkeitstheorie eine aufzählbare Menge A (z.B. eine Teilmenge von $\mathbb{N}$) bezeichnet, wenn es einen Algorithmus gibt, der die Elemente von A aufzählt.

Äquivalent ist folgende Definition: es gibt einen Algorithmus, der 1 ausgibt wenn die Eingabe in A ist, und auf anderen Eingaben 0 ausgibt oder nicht hält.

Zusammenfassung: Syntax und Semantik

- Prädikatenlogische Signatur
- Term, Atom, Formel
- Prädikatenlogisches Modell
- Auswertung von Formeln in Modellen
- Erfüllbarkeit, Gültigkeit; Folgerung, Äquivalenz
- Eigenschaften von Quantoren (Vertauschbarkeit untereinander und mit $\wedge, \vee$)
- Unentscheidbarkeit der Erfüllbarkeit von Formeln

Unser Ziel

Kalküle zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

Normalformen, Skolemisierung, Herbrandmodelle

Vorteile von Normalformen

- Reduktion der logischen Konzepte
- einfache Datenstrukturen für Beweisverfahren

Negationsnormalform

Definition. Eine Formel $F \in \mathrm{For}_\Sigma$ ist in Negationsnormalform (NNF), falls:

- $\rightarrow, \leftrightarrow$ kommen in F nicht vor
- jedes Negationszeichen in F steht direkt vor einem Atom (insbes. auch kein $\neg\neg$)

Negationsnormalform

Definition. Eine Formel $F \in \mathrm{For}_\Sigma$ ist in Negationsnormalform (NNF), falls:

- $\rightarrow, \leftrightarrow$ kommen in F nicht vor
- jedes Negationszeichen in F steht direkt vor einem Atom (insbes. auch kein $\neg\neg$)

Beispiele:

$$P, \quad \neg P, \quad (\neg P \vee Q) \wedge (R \vee (Q \wedge \neg P))$$

$$p(x, y) \vee \neg q(y)$$

$$\neg\neg P, \quad \neg(P \vee Q)$$

$$p(x, y) \rightarrow q(x)$$

Negationsnormalform

Definition. Eine Formel $F \in For_\Sigma$ ist in Negationsnormalform (NNF), falls:

- $\rightarrow, \leftrightarrow$ kommen in F nicht vor
- jedes Negationszeichen in F steht direkt vor einem Atom (insbes. auch kein $\neg\neg$)

Beispiele:

NNF:

$P, \quad \neg P, \quad (\neg P \vee Q) \wedge (R \vee (Q \wedge \neg P))$

$p(x, y) \vee \neg q(y)$

nicht NNF:

$\neg\neg P, \quad \neg(P \vee Q)$

$p(x, y) \rightarrow q(x)$

Bereinigte Formeln

Definition. Eine Formel $F \in For_\Sigma$ ist bereinigt, falls:

- Keine Variable in F sowohl gebunden als auch frei vorkommt
- Keine Variable mehr als einmal in F quantifiziert ist

Bereinigte Formeln

Definition. Eine Formel $F \in For_\Sigma$ ist bereinigt, falls:

- Keine Variable in F sowohl gebunden als auch frei vorkommt
- Keine Variable mehr als einmal in F quantifiziert ist

Beispiele:

Bereinigt

$P \vee Q$

$\forall x \exists y (p(x) \vee q(x, y) \vee \exists z\, r(x, z))$

Bereinigte Formeln

Definition. Eine Formel $F \in For_\Sigma$ ist bereinigt, falls:

- Keine Variable in F sowohl gebunden als auch frei vorkommt
- Keine Variable mehr als einmal in F quantifiziert ist

Beispiele:

Bereinigt

$$P \vee Q$$

$$\forall x \exists y (p(x) \vee q(x, y) \vee \exists z\, r(x, z))$$

Nicht bereinigt

$$p(x) \vee \forall x\, q(x)$$

$$(\forall x\, p(x)) \vee (\forall x\, q(x))$$

Pränexe Normalform

Definition: Pränexe Formeln sind von der Form

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \ F,$$

wobei F quantorenfrei, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. Hierbei heißt $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$ der Quantorenpräfix und F die Matrix der Formel.

Pränexe Normalform

Definition: Pränexe Formeln sind von der Form

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \ F,$$

wobei F quantorenfrei, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. Hierbei heißt $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$ der Quantorenpräfix und F die Matrix der Formel.

Beispiele

In Pränexnormalform

$p(x) \vee q(x)$

$\forall x \exists y \, (p(x) \vee q(y))$

Nicht in Pränexnormalform

$(\forall x \, p(x)) \vee (\exists y \, q(y))$

Pränexe Normalform

Welche Formeln sind in Pränexnormalform?

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\forall x \forall y \neg (P(x) \to Q(y))$$

$$\forall x \exists y R(x, y)$$

$$R(x, y)$$

$$\neg \forall x R(x, y)$$

Pränexe Normalform

Theorem. Zu jeder Formel $F \in For_\Sigma$ gibt es eine äquivalente Formel in Pränexnormalform

Konstruktiver Beweis

(1) Formel in NNF transformieren

1. Elimination von $\leftrightarrow$
2. Elimination von $\rightarrow$
3. "Nach innen schieben" von $\neg$
   - aussagenlogische Umformungen (de Morgans Regeln; $\neg\neg A \equiv A$)
   - $\neg \forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$
   - $\neg \exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x)$

(2) Formel bereinigen

(3) Alle Quantoren nach vorne (Reihenfolge unverändert lassen)

Beispiel 1

$$F = \forall x \Big(\big(\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y) \big) \rightarrow \neg \big(\exists y R(x,y) \wedge P \big) \Big)$$

Beispiel 1

$$F = \forall x \Big(\big(\exists y R(x,y) \land \forall y \neg S(x,y)\big) \rightarrow \neg\big(\exists y R(x,y) \land P\big) \Big)$$

(1) NNF

1.1. Elimination von $\rightarrow$

$$\forall x \Big(\neg\big(\exists y R(x,y) \land \forall y \neg S(x,y)\big) \lor \neg\big(\exists y R(x,y) \land P\big) \Big)$$

Beispiel 1

$$F = \forall x \Big((\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)) \rightarrow \neg(\exists y R(x,y) \wedge P) \Big)$$

(1) NNF

1.1. Elimination von $\rightarrow$

$$\forall x \Big(\neg(\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)) \vee \neg(\exists y R(x,y) \wedge P) \Big)$$

1.2. "Nach innen schieben" von $\neg$

$$\forall x \Big((\forall y \neg R(x,y) \vee \exists y S(x,y)) \vee (\forall y \neg R(x,y) \vee \neg P) \Big)$$

Beispiel 1

$$F = \forall x \Big((\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)) \to \neg(\exists y R(x,y) \wedge P) \Big)$$

(1) NNF

1.1. Elimination von $\to$

$$\forall x \Big(\neg(\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)) \vee \neg(\exists y R(x,y) \wedge P) \Big)$$

1.2. "Nach innen schieben" von $\neg$

$$\forall x \Big((\forall y \neg R(x,y) \vee \exists y S(x,y)) \vee (\forall y \neg R(x,y) \vee \neg P) \Big)$$

(2) Formel bereinigen

$$\forall x \Big((\forall y_1 \neg R(x,y_1) \vee \exists y_2 S(x,y_2)) \vee (\forall y_3 \neg R(x,y_3) \vee \neg P) \Big)$$

Beispiel 1

$$F = \forall x \Big((\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)) \rightarrow \neg(\exists y R(x,y) \wedge P) \Big)$$

(1) NNF

1.1. Elimination von $\rightarrow$

$$\forall x \Big(\neg(\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)) \vee \neg(\exists y R(x,y) \wedge P) \Big)$$

1.2. "Nach innen schieben" von $\neg$

$$\forall x \Big((\forall y \neg R(x,y) \vee \exists y S(x,y)) \vee (\forall y \neg R(x,y) \vee \neg P) \Big)$$

(2) Formel bereinigen

$$\forall x \Big((\forall y_1 \neg R(x,y_1) \vee \exists y_2 S(x,y_2)) \vee (\forall y_3 \neg R(x,y_3) \vee \neg P) \Big)$$

(3) Alle Quantoren nach vorne (Reihenfolge unverändert lassen)

$$\forall x \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \Big((\neg R(x,y_1) \vee S(x,y_2)) \vee (\neg R(x,y_3) \vee \neg P) \Big)$$

Beispiel 2

$$F := (\forall x((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \rightarrow ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y))$$

1. NNF

$$\begin{array}{rll}
F \equiv & \neg(\forall x((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & \text{Elim } \rightarrow \\
\equiv & \exists x \neg((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & (\text{De Morgan, } \neg\forall \equiv \exists\neg) \\
\equiv & \exists x(\neg(p(x) \vee q(x,y)) \vee \neg\exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & (\text{De Morgan}) \\
\equiv & \exists x((\neg p(x) \wedge \neg q(x,y)) \vee \forall z\, \neg r(x,y,z)) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & (\text{De Morgan, } \neg\exists \equiv \forall\neg) \\
=: & F_1 &
\end{array}$$

Beispiel 2

$$F := (\forall x((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \to ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y))$$

1. NNF

$$\begin{aligned}
F \equiv\;& \neg(\forall x((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) && \text{Elim } \to \\
\equiv\;& \exists x \neg((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) && \text{(De Morgan, } \neg\forall \equiv \exists\neg) \\
\equiv\;& \exists x(\neg(p(x) \vee q(x,y)) \vee \neg\exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) && \text{(De Morgan)} \\
\equiv\;& \exists x((\neg p(x) \wedge \neg q(x,y)) \vee \forall z\, \neg r(x,y,z)) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) && \text{(De Morgan, } \neg\exists \equiv \forall\neg) \\
=:\;& F_1
\end{aligned}$$

2. Bereinigung

$$F_1 \equiv \exists x_1((\neg p(x_1) \wedge \neg q(x_1,y)) \vee \forall z_1\, \neg r(x_1,y,z_1)) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z_2\, r(z_2,x,y)) \quad =: \quad F_2$$

Beispiel 2

$$F := (\forall x((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \rightarrow ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y))$$

1. NNF

$$\begin{aligned}
F &\equiv \neg(\forall x((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) && \text{Elim } \rightarrow \\
&\equiv \exists x \neg((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) && \text{(De Morgan, } \neg\forall \equiv \exists\neg) \\
&\equiv \exists x(\neg(p(x) \vee q(x,y)) \vee \neg\exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) && \text{(De Morgan)} \\
&\equiv \exists x((\neg p(x) \wedge \neg q(x,y)) \vee \forall z\, \neg r(x,y,z)) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) && \text{(De Morgan, } \neg\exists \equiv \forall\neg) \\
&=: F_1
\end{aligned}$$

2. Bereinigung

$$F_1 \equiv \exists x_1((\neg p(x_1) \wedge \neg q(x_1,y)) \vee \forall z_1\, \neg r(x_1,y,z_1)) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z_2\, r(z_2,x,y)) \quad =: \quad F_2$$

3. Alle Quantoren nach vorne $\mapsto$ Pränexnormalform

$$F_2 \equiv \underbrace{\exists x_1 \forall z_1 \forall z_2\, ((\neg p(x_1) \wedge \neg q(x_1,y)) \vee \neg r(x_1,y,z_1)) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge r(z_2,x,y))}_{\text{Pränexnormalform von } F}$$

Skolemnormalform

Definition. Eine Formel $F \in \mathsf{For}_\Sigma$ ist in Skolemnormalform (SNF), falls:

- F ist in Pränexnormalform
- F enthält nur universelle Quantoren

Skolemnormalform

Definition. Eine Formel $F \in For_\Sigma$ ist in Skolemnormalform (SNF), falls:

- F ist in Pränexnormalform
- F enthält nur universelle Quantoren

Beispiele:

In Skolemnormalform

$$\forall x \forall y (p(x) \vee q(y))$$

Nicht in Skolemnormalform

$$\forall x\, p(x) \vee \forall y\, q(y)$$

$$\forall x \exists y\, (p(x) \vee q(y))$$

Skolemisierung

Skolemisierung: Transformation $\Rightarrow_S$:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \exists y F \quad \Rightarrow_S \quad \forall x_1, \ldots, x_n F[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$$

wobei f/n ein neues Funktionssymbol (Skolemfunktion).

Skolemisierung

Beispiel

Gegeben:

$$\forall w(\exists x(p(w,x) \vee \forall y(q(w,x,y) \wedge \exists z\, r(y,z))))$$

Pränexnormalform:

$$\forall w \exists x \forall y \exists z((p(w,x) \vee (q(w,x,y) \wedge r(y,z))))$$

Skolemisierung: $x \mapsto sk_x(w)$, $z \mapsto sk_z(w,y)$

$$\forall w \forall y((p(w, sk_x(w)) \vee (q(w, sk_x(w), y) \wedge r(y, sk_z(w,y)))))$$

Skolemisierung

Zusammen:

$$F \overset{*}{\Rightarrow}_P \underbrace{G}_{\text{pränexe Form}} \overset{*}{\Rightarrow}_S \underbrace{H}_{\text{pränex, kein } \exists}$$

Theorem:

Seien F, G und H wie oben angenommen. Dann:

(1) F und G sind äquivalent.

(2) G erfüllbar (bzgl. Σ-Str) gdw. H erfüllbar (bzgl. Σ'-Str)

wobei $\Sigma' = (\Omega \cup SKF, \Pi)$, wenn $\Sigma = (\Omega, \Pi)$.

Skolemisierung

Lemma. Sei $G = \forall x_1, \dots, x_n \exists y G_1$ und $H = \forall x_1, \dots, x_n G_1[f(x_1, \dots, x_n)/y]$, wobei f ein neues Funktionssymbol (Skolemfunktion) ist.

G erfüllbar (bezgl. Σ-Str.) genau dann, wenn H erfüllbar (bezgl. Σ'-Str.).

wobei: $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und $\Sigma' = (\Omega \cup \{f\}, \Pi)$.

Beweis: (1) G erfüllbar $\Rightarrow$ H erfüllbar

Sei $\mathcal{A}$ eine Σ-Struktur und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A}(\beta)(G) = 1$.

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{A}(\beta)(G) &= \min_{a_1,\dots,a_n \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n])(\exists y G_1) \\ &= \min_{a_1,\dots,a_n \in U_{\mathcal{A}}} \max_{b \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) \end{aligned}$$

d.h. für alle $a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}$ es gibt ein $b \in U_{\mathcal{A}}$ mit:
$\mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) = 1$.

Wir definieren eine Σ'-struktur $\mathcal{A}'$, in der alle Funktionen und Prädikate in Σ wie in $\mathcal{A}$ definiert sind und in der wir für alle $a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}$, $f(a_1, \dots, a_n) := b$ definieren.

Dann $\mathcal{A}'(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n])(G_1[f(x_1, \dots, x_n)/y]) = 1$.

Skolemisierung

Lemma. Sei $G = \forall x_1, \ldots, x_n \exists y G_1$ und $H = \forall x_1, \ldots, x_n G_1[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$, wobei f ein neues Funktionssymbol (Skolemfunktion) ist.

G erfüllbar (bezgl. Σ-Str.) genau dann, wenn H erfüllbar (bezgl. Σ'-Str.).

wobei: $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und $\Sigma' = (\Omega \cup \{f\}, \Pi)$.

Beweis: (2) H erfüllbar $\Rightarrow$ G erfüllbar

Sei $\mathcal{A}'$ eine Σ'-Struktur und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}'}$ mit $\mathcal{A}'(\beta)(H) = 1$.

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{A}'(\beta)(H) &= \min_{a_1,\ldots,a_n \in U_{\mathcal{A}'}} \mathcal{A}'(\beta[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n])(G_1[f(x_1, \ldots, x_n)/y]) \\ &= \min_{a_1,\ldots,a_n \in U_{\mathcal{A}'}} (\beta[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto f_{\mathcal{A}'}(a_1, \ldots, a_n)])(G_1) \end{aligned}$$

d.h. für alle $a_1, \ldots, a_n \in U_{\mathcal{A}'}$ es gibt ein $b = f_{\mathcal{A}'}(a_1, \ldots, a_n) \in U_{\mathcal{A}'}$ mit: $\mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } \mathcal{A}(\beta)(G) &= \min_{a_1,\ldots,a_n \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n])(\exists y G_1) \\ &= \min_{a_1,\ldots,a_n \in U_{\mathcal{A}}} \max_{b \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) = 1 \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}'$ ohne die Funktion f.

Skolemisierung

Theorem:

Seien F, G und H wie oben angenommen. Dann:

(1) F und G sind äquivalent.

(2) G erfüllbar gdw. H erfüllbar
(bzgl. Σ-Str) (bzgl. Σ'-Str)
wobei $\Sigma' = (\Omega \cup SKF, \Pi)$, wenn $\Sigma = (\Omega, \Pi)$.

Beweisidee: Die Lemma (auf Seiten 34–35) wird sukzessive für alle existentiell quantifizierten Variablen (von links nach rechts) angewandt.

Klauselnormalform (konjunktive Normalform)

Transformationsregeln $\Rightarrow_K$

(1)	$(F \leftrightarrow G)$	$\Rightarrow_K$	$(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$	
(2)	$(F \rightarrow G)$	$\Rightarrow_K$	$(\neg F \vee G)$	
(3)	$\neg(F \vee G)$	$\Rightarrow_K$	$(\neg F \wedge \neg G)$	
(4)	$\neg(F \wedge G)$	$\Rightarrow_K$	$(\neg F \vee \neg G)$	
(5)	$\neg\neg F$	$\Rightarrow_K$	F	
$(\neg\forall)$	$\neg\forall x F$	$\Rightarrow_K$	$\exists x \neg F$	
$(\neg\exists)$	$\neg\exists x F$	$\Rightarrow_K$	$\forall x \neg F$	(NNF)

(P) Pränex Normalform

(S) Skolemisierung

(6)	$(F \wedge G) \vee H$	$\Rightarrow_K$	$(F \vee H) \wedge (G \vee H)$	
(7)	$(F \wedge \top)$	$\Rightarrow_K$	F	
(8)	$(F \wedge \bot)$	$\Rightarrow_K$	$\bot$	
(9)	$(F \vee \top)$	$\Rightarrow_K$	$\top$	
(10)	$(F \vee \bot)$	$\Rightarrow_K$	F	(KNF)

Gesamtbild

$$
\begin{array}{llll}
F & \overset{*}{\Rightarrow}_P & Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n \; G & (G \text{ quantorenfrei}) \quad \text{Pränexnormalform} \\
 & \overset{*}{\Rightarrow}_S & \forall x_1, \ldots, x_m \; H & (H \text{ quantorenfrei}) \quad \text{Skolemnormalform} \\
 & \overset{*}{\Rightarrow}_K & \underbrace{\underbrace{\forall x_1, \ldots, x_n}_{\text{weglassen}} \bigwedge_{i=1}^{k} \underbrace{\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij}}_{\text{Klauseln } C_i}}_{F'} & \text{Skolemnormalform mit Matrix in KNF}
\end{array}
$$

$N = \{C_1, \ldots, C_k\}$ heißt Klausel(normal)form (KNF) von F.
Merke: Die Variablen in Klauseln sind implizit allquantifiziert.
Falls F freie Variablen enthält, werden diese Variablen mit Konstanten ersetzt ($F(x)$ erfüllbar gdw. $\exists x F(x)$ erfüllbar)

Theorem: F ist erfüllbar, gdw. F' erfüllbar, gdw. N erfüllbar.

Viel Optimierungspotential vorhanden, wenn nur Erfüllbarkeit bewahrt werden muß und kann: Größenexplosion, kleine Stelligkeit von Skolemfunktionen.

Beispiel

$$F := \exists z \Big(\big(\forall x (p(u, z, x))\big) \to \big(\forall y (q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))\big) \Big)$$

Beispiel

$$F := \exists z \Big(\big(\forall x(p(u,z,x))\big) \to \big(\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))\big) \Big)$$

Pränexnormalform:

$$\begin{aligned}
F \quad &\equiv \quad \exists z \Big((\neg \forall x p(u,z,x)) \vee \big(\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))\big) \Big) \\
&\equiv \quad \exists z \Big(\big(\exists x \neg p(u,z,x)\big) \vee \big(\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))\big) \Big) && \text{(NNF)} \\
&\equiv \quad \exists z \Big(\big(\exists x \neg p(u,z,x)\big) \vee \big(\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x_1 r(y,x_1)))\big) \Big) && \text{(Bereinigung)} \\
&\equiv \quad \exists z \exists x \forall y \exists x_1 (\neg p(u,z,x) \vee (q(z,y) \wedge r(y,x_1))) && \text{(Pränexnormalform)}
\end{aligned}$$

Beispiel

$$F := \exists z\Big((\forall x(p(u,z,x))) \to (\forall y(q(z,y) \land (\exists x r(y,x)))) \Big)$$

Pränexnormalform:

$$\begin{aligned}
F &\equiv \exists z\Big((\neg\forall x p(u,z,x)) \lor (\forall y(q(z,y) \land (\exists x r(y,x)))) \Big) \\
&\equiv \exists z\Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \lor (\forall y(q(z,y) \land (\exists x r(y,x)))) \Big) && \text{(NNF)} \\
&\equiv \exists z\Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \lor (\forall y(q(z,y) \land (\exists x_1 r(y,x_1)))) \Big) && \text{(Bereinigung)} \\
&\equiv \exists z \exists x \forall y \exists x_1 (\neg p(u,z,x) \lor (q(z,y) \land r(y,x_1))) && \text{(Pränexnormalform)}
\end{aligned}$$

Skolemisierung $u \mapsto sk_u,\ z \mapsto sk_z;\ x \mapsto sk_x;\ x_1 \mapsto sk_{x_1}(y)$

$$\Rightarrow_S^* \ \forall y(\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \lor (q(sk_z, y) \land r(y, sk_{x_1}(y))))$$

(Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform)

Beispiel

$$F := \exists z \Big((\forall x (p(u,z,x))) \to (\forall y (q(z,y) \land (\exists x r(y,x)))) \Big)$$

Pränexnormalform:

$$\begin{array}{lcll}
F & \equiv & \exists z \Big((\neg \forall x p(u,z,x)) \lor (\forall y (q(z,y) \land (\exists x r(y,x)))) \Big) & \\
 & \equiv & \exists z \Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \lor (\forall y (q(z,y) \land (\exists x r(y,x)))) \Big) & \text{(NNF)} \\
 & \equiv & \exists z \Big((\exists x \neg p(u,z,x)) \lor (\forall y (q(z,y) \land (\exists x_1 r(y,x_1)))) \Big) & \text{(Bereinigung)} \\
 & \equiv & \exists z \exists x \forall y \exists x_1 (\neg p(u,z,x) \lor (q(z,y) \land r(y,x_1))) & \text{(Pränexnormalform)}
\end{array}$$

Skolemisierung $u \mapsto sk_u, z \mapsto sk_z; x \mapsto sk_x; x_1 \mapsto sk_{x_1}(y)$

$$\Rightarrow_S^* \quad \forall y (\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \lor (q(sk_z, y) \land r(y, sk_{x_1}(y))))$$

(Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform)

Skolemnormalform mit Matrix in KNF:

$$\Rightarrow_K^* \quad \forall y ((\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \lor q(sk_z, y)) \land (\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \lor r(y, sk_{x_1}(y))))$$

Klauselmenge: $N = \{\{\neg p(sk_u, sk_z, sk_x), q(sk_z, y)\}, \{\neg p(sk_u, sk_z, sk_x), r(y, sk_{x_1}(y))\}\}$

Zusammenfassung

Normalformen

- NNF
- Pränexe Normalform
- Skolemnormalform
- Klauselnormalform

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Resolution für Grundklauseln (Mengennotation)

Aussagenlogische Klauseln entsprechen Grundklauseln und umgekehrt.

Resolutionsregel:

$$\frac{C \cup \{A\} \qquad \{\neg A\} \cup D}{C \cup D}$$

$C \cup D$: Resolvente

A: resolviertes Atom

Beispielrefutation (Mengennotation)

1.	$\{\neg P(f(a)),\quad Q(b)\}$	(gegeben)
2.	$\{P(f(a)),\quad Q(b)\}$	(gegeben)
3.	$\{\neg P(g(b,a)),\quad \neg Q(b)\}$	(gegeben)
4.	$\{P(g(b,a))\}$	(gegeben)
5.	$\{Q(b)\}$	(Res. 2. in 1.)
6.	$\{\neg P(g(b,a))\}$	(Res. 5. in 3.)
8.	$\perp$	(Res. 4. in 6.)

Resolution für Grundklauseln (Klauselnotation)

Resolutionsregel:

$$\frac{C \vee A \qquad \neg A \vee D}{C \vee D}$$

$C \vee D$: Resolvente

A: resolviertes Atom

Faktorisieren:

$$\frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}$$

„$\vee$“ wird in Klauseln als assoziativ und kommutativ aufgefaßt.

Beispielrefutation (Klauselnotation)

1.	$\neg P(f(a)) \vee \neg P(f(a)) \vee Q(b)$	(gegeben)
2.	$P(f(a)) \vee Q(b)$	(gegeben)
3.	$\neg P(g(b,a)) \vee \neg Q(b)$	(gegeben)
4.	$P(g(b,a))$	(gegeben)
5.	$\neg P(f(a)) \vee Q(b) \vee Q(b)$	(Res. 2. in 1.)
6.	$\neg P(f(a)) \vee Q(b)$	(Fakt. 5.)
7.	$Q(b) \vee Q(b)$	(Res. 2. in 6.)
8.	$Q(b)$	(Fakt. 7.)
9.	$\neg P(g(b,a))$	(Res. 8. in 3.)
10.	$\perp$	(Res. 4. in 9.)

Korrektheit und Vollständigkeit

Aussagenlogische Resolution ist korrekt und vollständig.

- Mengennotation: Resolutionsregel
- Klauselnotation: Resolutionsregel $+$ Faktorisieren

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt)
  $\mapsto$ ggf. umbenennen
- $\sigma(L) = \sigma(L')$

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

$$
\begin{aligned}
N = \{C_1(x_1, ..., x_n), \ldots, C_m(x_1, ..., x_n)\} \mapsto\ & \forall x_1, ..., x_n (C_1(x_1, ..., x_n) \wedge \cdots \wedge C_m(x_1, ..., x_n)) \equiv \\
& (\forall x_1, ..., x_n C_1(x_1, ..., x_n)) \wedge \cdots \wedge (\forall x_1, ..., x_n C_m(x_1, ..., x_n)) \equiv \\
& (\forall x_1^1, ..., x_n^1 C_1(x_1^1, ..., x_n^1)) \wedge \cdots \wedge (\forall x_1^m, ..., x_n^m C_m(x_1^m, ..., x_n^m))
\end{aligned}
$$

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$
\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}
$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt)
  $\mapsto$ ggf. umbenennen
- $\sigma(L) = \sigma(L')$

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt) $\mapsto$ ggf. umbenennen
- $\sigma(L) = \sigma(L')$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$
Idee: Wähle die "allgemeinste" Substitution, mit $\sigma(L) = \sigma(L')$

Beispiel

$$\frac{\{p(x,f(x)),q(f(x))\} \qquad\qquad \{\neg r(f(y)),\neg q(y)\}}{\{p(x,f(x))\sigma,\neg r(f(y))\sigma\}}$$

$L = q(f(x))$, $L' = q(y)$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$:

σ_1 $\qquad$ $\sigma_1(x) = a$, $\sigma_1(y) = f(a)$

σ_2 $\qquad$ $\sigma_2(x) = f(a)$, $\sigma_2(y) = f(f(a))$

$\ldots$

Beispiel

$$\frac{\{p(x,f(x)),q(f(x))\} \qquad\qquad \{\neg r(f(y)),\neg q(y)\}}{\{p(x,f(x))\sigma,\neg r(f(y))\sigma\}}$$

$L = q(f(x))$, $L' = q(y)$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$:

$\sigma_1 \qquad \sigma_1(x) = a,\ \sigma_1(y) = f(a)$

$\sigma_1 \qquad \sigma_1(x) = f(a),\ \sigma_1(y) = f(f(a))$

$\ldots$

Idee: Wähle die "allgemeinste" Substitution, mit $\sigma(L) = \sigma(L')$

$q(f(x)) \stackrel{?}{=} q(y) \quad \Rightarrow \quad f(x) \stackrel{?}{=} y \quad \Rightarrow \quad y \stackrel{?}{=} f(x)$

$\sigma = [f(x)/y] \qquad \sigma(y) = f(x),\ \sigma(z) = z$ for $z \neq y$.