Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 5

Resolutionskalkül: Korrektheit und Vollständigkeit

Beweise

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Resolutionskalkül *Res* für allgemeine Klauseln (Mengennotation)

$$\frac{C \cup \{A_1\} \qquad D \cup \{\neg A_2\}}{(C \cup D)\sigma} \quad \text{falls } \sigma = \mathrm{mgu}(A_1, A_2) \qquad \text{[Resolution]}$$

$$\frac{C \cup \{L_1, L_2\}}{(C \cup \{L_1\})\sigma} \quad \text{falls } \sigma = \mathrm{mgu}(L_1, L_2) \qquad \text{[Faktorisierung]}$$

wobei:
C, D Klauseln, A_1, A_2: Atome, L_1, L_2: Literale

Es wird immer implizit angenommen, dass die Variablen in einer der beiden Prämissen der Resolutionsregel ggfs. (bijektiv) umbenannt werden, so dass sie disjunkt mit denen der anderen Prämisse sind.

Notation

Sei N eine Klauselmenge und

$$\text{Res}(N) = N \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } N$$
$$\text{oder Resultat der Faktorisierung einer Klausel aus } N\}$$

$\text{Res}^0(N) = N$

$\text{Res}^{n+1}(N) = \text{Res}(\text{Res}^n(N))$

$\text{Res}^\star(N) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}^n(N)$

(bezeichnet die Vereinigung der Ergebnisse aus aller möglichen Resolutions- und Faktorisierungsschritte auf N)

Resolution: Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Korrektheit)
Für jede Menge N von Klauseln gilt: Falls $\perp \in \text{Res}^*(N)$, so N unerfüllbar.

Beweis (Idee): Wie bei Aussagenlogik.

Theorem (Vollständigkeit)
Für jede Menge N von Klauseln gilt: Falls N unerfüllbar, so $\perp \in \text{Res}^*(N)$.

Idee: Reduktion auf Vollständigkeit der Resolution für Grundklauseln (also Aussagenlogischer Resolution).

$\mapsto$ Herbrandinterpretationen

Resolution: Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Korrektheit)

Für jede Menge N von Klauseln gilt: Falls $\perp \in \mathrm{Res}^*(N)$, so N unerfüllbar.

Resolution: Korrektheit

Theorem (Korrektheit)
Für jede Menge N von Klauseln gilt: Falls $\bot \in \mathrm{Res}^*(N)$, so N unerfüllbar.

Beweis (Idee):

Wie bei Aussagenlogik.

Einzelne Regelanwendung erhält die Erfüllbarkeit der Klauselmenge.

Auch dies einfach zu beweisen wie in Aussagenlogik (beachte dabei: Variablen in Klauseln sind universell quantifiziert).

Resolution: Korrektheit

Theorem (Korrektheit)
Für jede Menge N von Klauseln gilt: Falls $\bot \in \mathrm{Res}^*(N)$, so N unerfüllbar.

Beweis:

Annahme: $\mathcal{A} \models C_1 \vee L_1$, $\mathcal{A} \models C_2 \vee \neg L_2$ (d.h. $\mathcal{A} \models \forall x(C_1 \vee L_1)$, $\mathcal{A} \models \forall x(C_2 \vee \neg L_2)$)

Sei $\sigma = mgu(L_1, L_2)$.
Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \forall x(C_1 \vee C_2)\sigma$.

Sei β beliebig.
$\mathcal{A}(\beta)((C_1 \vee C_2)\sigma) = \mathcal{A}(\beta \circ \sigma)(C_1 \vee C_2)$ (Substitution-Lemma)

- Fall 1: $\mathcal{A}(\beta \circ \sigma)(C_1) = 1$. Dann $\mathcal{A}(\beta)((C_1 \vee C_2)\sigma) = 1$.

- Fall 2: $\mathcal{A}(\beta \circ \sigma)(C_1) = 0$. Laut Annahme, $\mathcal{A}(\beta \circ \sigma)(C_1 \vee L_1) = 1$, so $\mathcal{A}(\beta \circ \sigma)(L_1) = 1$. Dann: $\mathcal{A}(\beta \circ \sigma)(L_2) = \mathcal{A}(\beta)(L_2\sigma) = \mathcal{A}(\beta)(L_1\sigma) = \mathcal{A}(\beta \circ \sigma)(L_1) = 1$. Also: $\mathcal{A}(\beta \circ \sigma)(\neg L_2) = 0$.

  Aber $\mathcal{A}(\beta \circ \sigma)(C_2 \vee \neg L_2) = 1$, so $\mathcal{A}(\beta \circ \sigma)(C_2) = 1$. Dann $\mathcal{A}(\beta)((C_1 \vee C_2)\sigma) = 1$.

Resolution: Vollständigkeit

Theorem
Für jede Menge N von Klauseln gilt: Falls N unerfüllbar, so $\bot \in \mathrm{Res}^*(N)$.

Idee: Reduktion auf Vollständigkeit der Resolution für Grundklauseln (also Aussagenlogischer Resolution).

$\mapsto$ Herbrandinterpretationen

Herbrand-Interpretationen

Ω enthalte immer mindestens ein Konstantensymbol.

Definition. Herbrand-Interpretationen (über Σ) sind Σ-Strukturen $\mathcal{A}$ mit:

1. $U_{\mathcal{A}} = T_{\Sigma}$ Menge der Grundterme, d.h. variablenfreien Terme über Σ ($U_{\mathcal{A}}$: Herbrand-Universum)
2. $f_{\mathcal{A}} : (s_1, \ldots, s_n) \mapsto f(s_1, \ldots, s_n),\ f/n \in \Omega$

d.h. vorgegeben sind Terme als Daten und Funktionen als Termkonstruktoren.

Variabel sind nur die Interpretationen der Prädikatensymbole $p_{\mathcal{A}} \subseteq T_{\Sigma}^{m},\ p_m \in \Pi$.

Satz.
Jede Menge von Grundatomen I identifiziert genau eine Herbrand-Interpretation $\mathcal{A}$ durch

$$(s_1, \ldots, s_n) \in p_{\mathcal{A}} \text{ genau dann, wenn } p(s_1, \ldots, s_n) \in I$$

Im folgenden werden wir daher nicht zwischen Herbrand-Interpretationen (über Σ) und Mengen von Σ-Grundatomen unterscheiden.

Herbrand-Interpretationen als Mengen von Grundatomen

Beispiel:

- Sei $\mathcal{A}$ eine Herbrand Interpretation mit:
  $p_\mathcal{A} = \{(a, b),\ (f(a), f(b)),\ (f(f(a)), f(f(b)))\}$ und
  $q_\mathcal{A} = \{a,\ f(a),\ f(f(a)),\ f(f(f(a))), \dots\}$
  Dann sind folgende Grundatome wahr in $\mathcal{A}$:
  $p(a, b),\quad p(f(a), f(b)),\quad p(f(f(a)), f(f(b))),$
  $q(a),\quad q(f(a)),\quad q(f(f(a)),\quad q(f(f(f(a)))), \dots.$
  Sei I die Menge dieser Grundatome. I identifiziert $\mathcal{A}$.

- Sei $I' = \{p(a, b),\ p(b, a),\ q(b),\ q(f(b)),\ q(f(f(b)))\}$.
  I' identifiziert die Herbrand interpretation $\mathcal{A}'$ mit:
  $p_{\mathcal{A}'} = \{(a, b), (b, a)\}$ und
  $q_{\mathcal{A}'} = \{b, f(b), f(f(b))\}$.

Existenz von Herbrand-Modellen

Definition. Eine Herbrand-Interpretation I heißt Herbrand-Modell von F, falls $I \models F$.

Theorem [Herbrand] Sei N eine Menge von Σ-Klauseln.

$$\begin{array}{lll} N \text{ erfüllbar} & \text{g.d.w.} & N \text{ hat Herbrand-Modell (über } \Sigma) \\ & \text{g.d.w.} & G_\Sigma(N) \text{ hat Herbrand-Modell (über } \Sigma) \end{array}$$

wobei

$$G_\Sigma(N) = \{C\sigma \text{ Grundklausel} \mid C \in N,\ \sigma : X \to T_\Sigma\}$$

die Menge der Grundinstanzen von N ist.

[Beweis später im Zusammenhang mit dem Vollständigkeitsbeweis für Resolution.]

Herbrand-Interpretationen als Mengen von Grundatomen

Beispiel:

$\Sigma_{Pres} = (\{0/0, s/1, +/2\},\ \{< /2, \leq /2\})$

Herbrand-Interpretation über Σ_{Pres}

$$
\begin{aligned}
I = \{ \quad & 0 \leq 0,\ 0 \leq s(0),\ 0 \leq s(s(0)),\ \ldots, \\
& 0 + 0 \leq 0,\ 0 + 0 \leq s(0),\ \ldots, \\
& \ldots,\ (s(0) + 0) + s(0) \leq s(0) + (s(0) + s(0)) \\
& \ldots \\
& s(0) + 0 < s(0) + 0 + 0 + s(0) \\
& \ldots\}
\end{aligned}
$$

Beispiel für G_Σ

Bzgl. Σ_{Pres} erhält man für

$$C = (x < y) \vee (y \leq s(x))$$

folgende Grundinstanzen:

$(0 < 0) \vee (0 \leq s(0))$
$(s(0) < 0) \vee (0 \leq s(s(0)))$
$\ldots$
$(s(0) + s(0) < s(0) + 0) \vee (s(0) + 0 \leq s(s(0) + s(0)))$
$\ldots$

Resolution: Vollständigkeit

Theorem (Vollständigkeit)
Für jede Menge N von Klauseln gilt: Falls N unerfüllbar, so $\bot \in \mathrm{Res}^*(N)$.

Beweisplan:

1. Sei N eine unter Res saturierte Menge allgemeiner Klauseln, d.h. $\mathit{Res}(N) \subseteq N$. Dann ist auch $G_\Sigma(N)$ saturiert.

   Beweis: "Lifting-Lemma"

2. Sei N eine Menge von Σ-Klauseln.
   N erfüllbar g.d.w. N besitzt Herbrand-Modell über Σ.

3. Sei N Menge allgemeiner Klauseln mit $\mathit{Res}(N) \subseteq N$. Dann $N \models \bot$ genau dann, wenn $\bot \in N$.

Resolution: Vollständigkeit

Theorem (**Vollständigkeit**)
Für jede Menge N von Klauseln gilt: Falls N unerfüllbar, so $\bot \in \text{Res}^*(N)$.

Beweisplan:

1. Sei N eine unter Res saturierte Menge allgemeiner Klauseln, d.h. $Res(N) \subseteq N$. Dann ist auch $G_\Sigma(N)$ saturiert.

   Beweis: "Lifting-Lemma"

2. Sei N eine Menge von Σ-Klauseln.
   N erfüllbar g.d.w. N besitzt Herbrand-Modell über Σ.

3. Sei N Menge allgemeiner Klauseln mit $Res(N) \subseteq N$. Dann $N \models \bot$ genau dann, wenn $\bot \in N$.

Lifting-Lemma

Lemma. Falls

$$\frac{C\sigma \qquad\qquad D\sigma}{C'} \qquad \text{[aussagenlogische Resolution]}$$

dann gibt es τ, so dass

$$\frac{C \qquad\qquad D}{C''} \qquad \text{[allgemeine Resolution]}$$

und $C' = C''\tau$.

Entsprechend für Faktorisieren.

Lifting-Lemma: Beweis

Beweis (Idee)

Sei $C = C_1 \vee L_1$, $D = C_2 \vee \neg L_2$.

$C\sigma = C_1\sigma \vee L_1\sigma$, $D\sigma = C_2\sigma \vee \neg L_2\sigma$.

$L_1\sigma = L_2\sigma$ und $C' = (C_1 \vee C_2)\sigma$.

L_1, L_2 unifizierbar. Sei $\rho = mgu(L_1, L_2)$.

Die Resolvente C'' ist dann $(C_1 \vee C_2)\rho$.

ρ ist allgemeiner als σ, d.h. es gibt eine Substitution τ mit $\sigma(x) = \tau(\rho(x))$ für alle $x \in X$.

$C''\tau = (C_1 \vee C_2)\rho\tau = (C_1 \vee C_2)\sigma = C'$.

Saturiertheit von Mengen allgemeiner Klauseln

Sei N eine Klauselmenge und

$$\text{Res}(N) = N \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } N \\ \text{oder Resultat der Faktorisierung einer Klausel aus } N\}$$

$\text{Res}^0(N) = N$

$\text{Res}^{n+1}(N) = \text{Res}(\text{Res}^n(N))$

$\text{Res}^\star(N) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \text{Res}^n(N)$

(bezeichnet die Vereinigung der Resolventen aus aller möglichen Resolutionsschritte auf N)

Saturiertheit von Mengen allgemeiner Klauseln

Theorem.
Sei N eine unter Res saturierte Menge allgemeiner Klauseln, d.h. $Res(N) \subseteq N$. Dann ist auch $G_\Sigma(N)$ saturiert, d.h.

$$Res(G_\Sigma(N)) \subseteq G_\Sigma(N).$$

Saturiertheit von Mengen allgemeiner Klauseln

Theorem.
Sei N eine unter *Res* saturierte Menge allgemeiner Klauseln, d.h. $Res(N) \subseteq N$. Dann ist auch $G_\Sigma(N)$ saturiert, d.h.

$$Res(G_\Sigma(N)) \subseteq G_\Sigma(N).$$

Beweis. Sei $C' \in Res(G_\Sigma(N))$. D.h. es gibt: (i) Grundinstanzen $C\sigma$ und $D\sigma'$ von N mit Resolvente C', oder (ii) Grundinstanz $C\sigma$ s.d. C' durch Faktorisierung abgeleitet.

(i) Ist C' Resolvente, so können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\sigma = \sigma'$.

(Nur wenn C und D nicht variablen-disjunkt wären, könnte dies schiefgehen. Dann aber dürfen und müssen wir die Variablen in einer Klausel umbenennen.)

Wegen des Lifting-Lemmas sind C und D resolvierbar mit einer Resolvente C'' so dass $C''\tau = C'$, für eine geeignete Substitution τ. Weil $C'' \in N$ nach Voraussetzung, ist $C' \in G_\Sigma(N)$.

(ii) Analog für den Fall, dass C' durch Faktorisierung abgeleitet wurde.

Satz von Herbrand

Theorem (Herbrand)
Sei N eine Menge von Σ-Klauseln.

$$N \text{ erfüllbar g.d.w. } N \text{ besitzt Herbrand-Modell über } \Sigma$$

Beweis:

"$\Leftarrow$" trivial

"$\Rightarrow$"

$$
\begin{array}{lll}
N \not\models \bot & \Rightarrow \bot \notin \mathit{Res}^*(N) & \text{(Res. korrekt)} \\
& \Rightarrow \bot \notin G_\Sigma(\mathit{Res}^*(N)) & \\
& \Rightarrow G_\Sigma(\mathit{Res}^*(N)) \text{ hat ein ('aussagenlogisches') Modell} & \\
& \Rightarrow G_\Sigma(\mathit{Res}^*(N)) \text{ hat ein Herbrand Modell } I & \\
& \Rightarrow I \models \mathit{Res}^*(N) & (I \text{ Herbrand-Modell}) \\
& \Rightarrow I \models N & (N \subseteq \mathit{Res}^*(N))
\end{array}
$$

Korrektheit und Vollständigkeit der allgemeinen Resolution

Theorem

Sei N Menge allgemeiner Klauseln mit $Res(N) \subseteq N$. Dann:

$$N \models \bot \text{ genau dann, wenn } \bot \in N$$

Korrektheit und Vollständigkeit der allgemeinen Resolution

Theorem

Sei N Menge allgemeiner Klauseln mit $\mathit{Res}(N) \subseteq N$. Dann:

$$N \models \bot \text{ genau dann, wenn } \bot \in N$$

Proof: "$\Leftarrow$" trivial

"$\Rightarrow$:" Sei N Klauselmenge mit $\mathit{Res}(N) \subseteq N$.
Dann $\mathit{Res}(G_\Sigma(N)) \subseteq G_\Sigma(N)$ (Theorem Seite 19)

Annahme: $N \models \bot$. Dann $G_\Sigma(N) \models \bot$ (Wir haben gezeigt, dass $G_\Sigma(N) \not\models \bot \Rightarrow G_\Sigma(N)$ hat Herbrand Modell I und $I \models N$)

Aber $G_\Sigma(N) \models \bot$ gdw. $\bot \in G_\Sigma(N)$ (aussag.log. Resol. vollständig + korrekt).

Es ist leicht zu sehen, dass $\bot \in G_\Sigma(N)$ gdw. $\bot \in N$.

Resolution: Vollständigkeit

Theorem (Vollständigkeit)
Für jede Menge N von Klauseln gilt: Falls N unerfüllbar, so $\bot \in \mathrm{Res}^*(N)$.

Beweis:

Sei $M = \mathrm{Res}^*(N)$. Dann $\mathrm{Res}(M) \subseteq M$. So: $M \models \bot$ gdw. $\bot \in M$.

Widerspruchsbeweis:

Annahme: $\bot \notin \mathrm{Res}^*(N)$. Dann $\mathrm{Res}^*(N) \not\models \bot$, d.h. $\mathrm{Res}^*(N)$ hat ein Modell $\mathcal{A}$.

Da $N \subseteq \mathrm{Res}^*(N)$, $\mathcal{A} \models N$, d.h. $N \not\models \bot$.