

# Strukturelle Induktion

---

Bei der vollständigen Induktion werden Eigenschaften der natürlichen Zahlen bewiesen.

Bei der strukturellen Induktion werden Eigenschaften für Mengen bewiesen, deren Elemente aus Grundelementen durch eine endliche Anzahl von Konstruktionsschritten (unter Verwendung bereits konstruierter Elemente) bzw. mittels eines Erzeugungssystems entstehen.

# Induktive Definitionen

---

## Induktive Definition von Mengen:

Induktive Definition einer Menge  $M$  aus einer Basismenge  $B$  mit “Konstruktoren” in  $\Sigma$ .

(Konstruktoren sind Funktionssymbole; für  $f \in \Sigma$ ,  $a(f) \in \mathbb{N}$  ist die Stelligkeit von  $f$ .)

Basismenge:	$B$
Erzeugungsregel:	Wenn $f \in \Sigma$ mit Stelligkeit $n$ und $e_1, \dots, e_n \in M$ , dann gilt $f(e_1, \dots, e_n) \in M$ .

$M$  ist die kleinste Menge,

- die die Basismenge  $B$  enthält,
- mit der Eigenschaft, dass für alle  $f \in \Sigma$  mit Stelligkeit  $n$  und alle  $e_1, \dots, e_n \in M$ :  $f(e_1, \dots, e_n) \in M$ .

# Induktive Definitionen: Beispiele

---

## (1) Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen

Basismenge: 0

Erzeugungsregel: Wenn  $n \in \mathbb{N}$ , dann gilt  $n + 1 \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$  ist die kleinste aller Mengen  $A$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $A$  enthält 0;
- (2) für alle Elemente  $n$ , falls  $n \in A$  so  $n + 1 \in A$ .

Das bedeutet, dass:

- (1)  $0 \in \mathbb{N}$
- (2) Falls  $n \in \mathbb{N}$  so  $n + 1 \in \mathbb{N}$ .
- (3) Für jede Menge  $A$  mit Eigenschaften (1) und (2) gilt:  $\mathbb{N} \subseteq A$ .

# Induktive Definitionen: Beispiele

---

## (2) Menge $\Sigma^*$ aller Wörter über ein Alphabet $\Sigma$

Basismenge: Das leere Wort  $\epsilon \in \Sigma^*$

Erzeugungsregel: Wenn  $w \in \Sigma^*$  und  $a \in \Sigma$ ,  
dann gilt  $wa \in \Sigma^*$

$\Sigma^*$  ist die kleinste aller Mengen  $A$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $A$  enthält das leere Wort  $\epsilon$
- (2) für alle Elemente  $w$ , falls  $w \in A$  und  $a \in \Sigma$ , so  $wa \in A$ .

Das bedeutet, dass:

- (1)  $\epsilon \in \Sigma^*$
- (2) Falls  $w \in \Sigma^*$  und  $a \in \Sigma$  so  $wa \in \Sigma^*$ .
- (3) Für jede Menge  $A$  mit Eigenschaften (1) und (2) gilt:  $\Sigma^* \subseteq A$ .

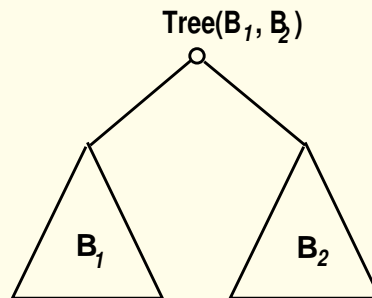
# Induktive Definitionen: Beispiele

---

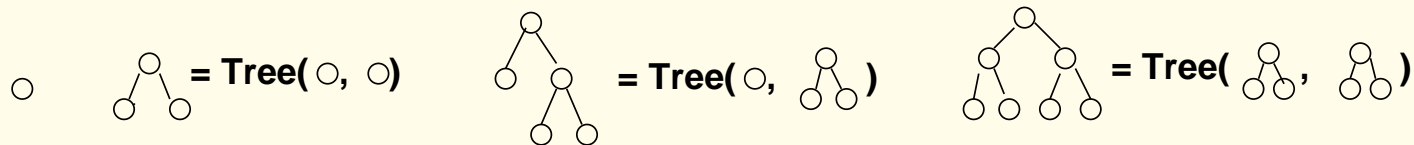
## (3) Bin : die Menge aller (vollständigen) binären Bäume

Basismenge:           ○ Baum mit nur einem Knoten.

Erzeugungsregel:    Wenn  $B_1, B_2 \in \text{Bin}$ , dann ist auch  
 $\text{Tree}(B_1, B_2) \in \text{Bin}$ .



## Beispiele:



# Induktive Definitionen: Beispiele

---

## (3) Bin : die Menge aller (vollständigen) binären Bäume

Basismenge:  $\circ$  Baum mit nur einem Knoten.

Erzeugungsregel: Wenn  $B_1, B_2 \in \text{Bin}$ , dann ist auch  $\text{Tree}(B_1, B_2) \in \text{Bin}$ .

Bin ist die kleinste aller Mengen  $A$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $A$  enthält der Baum mit nur einem Knoten  $\circ$ .
- (2) für alle Elemente  $B_1, B_2$ , falls  $B_1, B_2 \in A$  so  $\text{Tree}(B_1, B_2) \in A$ .

Das bedeutet, dass:

- (1)  $\circ \in \text{Bin}$
- (2) Falls  $B_1, B_2 \in \text{Bin}$  so  $\text{Tree}(B_1, B_2) \in \text{Bin}$ .
- (3) Für jede Menge  $A$  mit Eigenschaften (1) und (2) gilt:  $\text{Bin} \subseteq A$ .

# Induktive Definitionen: Beispiele

---

## (4) Menge aller aussagenlogischen Formeln

Basismenge:  $\perp$  (falsch),  $\top$  (wahr),  $P_0, P_1, P_2, \dots$  sind  
aussagenlogische Formeln (atomare Formeln)

Erzeugungsregel: Wenn  $F_1, F_2$  aussagenlogische Formeln sind,  
dann sind auch  $\neg F_1, F_1 \wedge F_2, F_1 \vee F_2,$   
 $F_1 \rightarrow F_2, F_1 \leftrightarrow F_2$  aussagenlogische Formeln

# Induktive Definitionen

## Induktive Definition von Mengen:

Induktive Definition einer Menge  $M$  aus einer Basismenge  $B$  mit Operationssymbolen ("Konstruktoren")  $\Sigma$  (wobei  $a(f)$  Stelligkeit von  $f$  für  $f \in \Sigma$ ).

Basismenge:  $B$

Erzeugungsregel: Wenn  $f \in \Sigma$  mit Stelligkeit  $n$  und  $e_1, \dots, e_n \in M$ , dann gilt  $f(e_1, \dots, e_n) \in M$ .

$M$  ist die kleinste aller Mengen  $A$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $A$  enthält die Basismenge  $B$
- (2) für alle Elemente  $e_1, \dots, e_n \in A$ , und alle  $f \in \Sigma$  (mit Stelligkeit  $n$ ), ist auch  $f(e_1, \dots, e_n) \in A$ .

Dass bedeutet, dass:

- (1)  $B \subseteq M$
- (2) Falls  $e_1, \dots, e_n \in M$  und  $f \in \Sigma$  (mit Stelligkeit  $n$ ), so  $f(e_1, \dots, e_n) \in M$ .
- (3) Für jede Menge  $A$  mit Eigenschaften (1) und (2) gilt:  $M \subseteq A$ .



# Strukturelle Induktion

---

Sei  $M$  die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:

- $M$  enthält die Basismenge  $B$ ,
- für alle  $f \in \Sigma$  mit Stelligkeit  $n$  und alle  $e_1, \dots, e_n \in M$ :  $f(e_1, \dots, e_n) \in M$ .

Zu zeigen:  $\forall x \in M : P(x)$

(1) **Induktionsbasis:** Beweise, dass für alle  $b \in B$ ,  $P(b)$  gilt.

(2) Sei  $e \in M$ ,  $e \notin B$ .

Dann  $e = f(e_1, \dots, e_n)$ , mit  $f \in \Sigma$  und  $e_1, \dots, e_n \in M$ .

**Induktionsvoraussetzung:** Wir nehmen an, dass  $P(e_1), \dots, P(e_n)$  gelten.

**Induktionsschluss:** Folgere, dass  $P(e)$  gilt.

# Strukturelle Induktion

---

**Satz.** Falls:

- (1) bewiesen werden kann, dass für alle  $b \in B$ ,  $P(b)$  gilt. (Induktionsbasis)
- (2) falls  $e = f(e_1, \dots, e_n)$  mit  $f \in \Sigma$   
unter der Annahme dass  $P(e_1), \dots, P(e_n)$  gelten (Induktionsvoraussetzung)  
wir beweisen können, dass auch  $P(e)$  gilt (Induktionsschritt)

Dann gilt  $P(m)$  für alle  $m \in M$ .

**Beweis:** Sei  $A = \{e \mid P(e) \text{ wahr}\}$ .

- (1) Da bewiesen werden kann, dass für alle  $b \in B$ ,  $P(b)$  gilt, wissen wir, dass  $A$  die Basismenge  $B$  enthält.
- (2) Da wir, aus der Annahme dass  $P(e_1), \dots, P(e_n)$  wahr sind, beweisen können, dass auch  $P(e)$  wahr ist, wissen wir, dass falls  $e_1, \dots, e_n \in A$ , und  $f \in \Sigma$  (mit Stelligkeit  $n$ ), so  $f(e_1, \dots, e_n) \in A$ .

Da  $M$  die kleinste aller Mengen mit Eigenschaften (1) und (2) ist, folgt, dass  $M \subseteq A = \{e \mid P(e) \text{ wahr}\}$ , d.h.  $\forall m \in M, P(m) \text{ wahr}$ .

# Beispiel

---

$\Sigma^*$  : die Menge aller Wörter über ein Alphabet  $\Sigma$

Basismenge: Das leere Wort  $\epsilon \in \Sigma^*$

Erzeugungsregel: Wenn  $w \in \Sigma^*$  und  $a \in \Sigma$ ,  
dann gilt  $wa \in \Sigma^*$

Sei die Umkehrung (Reverse) eines Wortes wie folgt definiert:

$$\text{rev}(\epsilon) = \epsilon$$

$$\text{rev}(wa) = a \text{rev}(w) \text{ mit } w \in \Sigma^* \text{ und } a \in \Sigma.$$

# Beispiel

---

Zu zeigen:  $\forall w_1, w_2 \in \Sigma^*, \text{rev}(w_1 w_2) = \text{rev}(w_2) \text{rev}(w_1)$

Sei  $w_1 \in \Sigma^*$ , beliebig.

Zu zeigen:  $\forall w_2 \in \Sigma^*, p(w_2)$  wobei:  $p(w_2) : \text{rev}(w_1 w_2) = \text{rev}(w_2) \text{rev}(w_1)$

Induktion über die Struktur von  $w_2$ .

**(1) Induktionsbasis:** Wir zeigen, dass die Eigenschaft gilt für  $w_2 = \epsilon$   
(d.h. dass  $P(\epsilon) : \text{rev}(w_1 \epsilon) = \text{rev}(\epsilon) \text{rev}(w_1)$  wahr ist).

**Beweis:**  $\text{rev}(w_1 \epsilon) = \text{rev}(w_1) = \epsilon \text{rev}(w_1) = \text{rev}(\epsilon) \text{rev}(w_1)$ .

# Beispiel

---

Zu zeigen:  $\forall w_1, w_2 \in \Sigma, \text{rev}(w_1 w_2) = \text{rev}(w_2) \text{rev}(w_1)$

Sei  $w_1 \in \Sigma^*$ , beliebig.

Zu zeigen:  $\forall w_2 \in \Sigma, p(w_2)$  wobei:  $p(w_2) : \text{rev}(w_1 w_2) = \text{rev}(w_2) \text{rev}(w_1)$

**(2)** Sei  $w_2 \in \Sigma^*$ ,  $w_2 \neq \epsilon$ . Dann  $w_2 = wa$ .

**Induktionsvoraussetzung:** Wir nehmen an, dass  $p(w)$  gilt,  
d.h. dass  $\text{rev}(w_1 w) = \text{rev}(w) \text{rev}(w_1)$ .

**Induktionsschluss:** Wir beweisen, dass dann  $p(w_2)$  gilt.

$$\begin{aligned} \text{rev}(w_1 w_2) &= \text{rev}(w_1 (wa)) = \text{rev}((w_1 w)a) = a \text{rev}(w_1 w) && \text{(Definition von rev)} \\ &= a \text{rev}(w) \text{rev}(w_1) && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &= (a \text{rev}(w)) \text{rev}(w_1) = \text{rev}(wa) \text{rev}(w_1) && \text{(Definition von rev)} \\ &= \text{rev}(w_2) \text{rev}(w_1) \end{aligned}$$

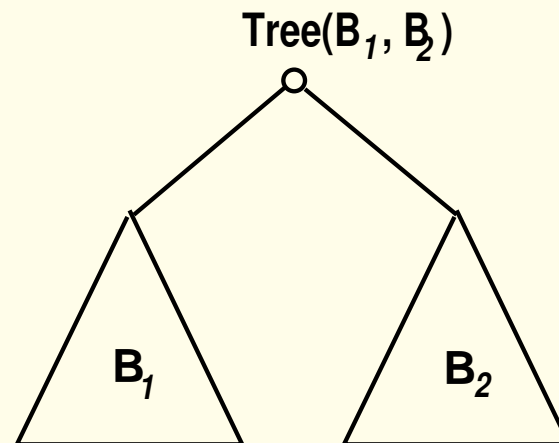
# Beispiel 2

---

Bin : Menge allen (vollständigen) binären Bäume

Basismenge:           ○ Baum mit nur einem Knoten.

Erzeugungsregel:    Wenn  $B_1, B_2 \in \text{Bin}$ , dann ist auch  
 $\text{Tree}(B_1, B_2) \in \text{Bin}$ .



# Beispiel 2

---

## Behauptung:

Für alle  $B \in \text{Bin}$ , falls  $B$   $n$  Blätter hat, so besitzt  $B$  genau  $n - 1$  innere Knoten.

$P(B)$  : Falls  $B$   $n \geq 1$  Blätter hat,  
dann besitzt  $B$  genau  $n - 1$  innere Knoten.

**(1) Induktionsbasis:** Wir zeigen, dass  $P(B)$  gilt wenn  $B$  nur aus einem Knoten  $\circ$  besteht.

**Beweis:** Sei  $B$  Baum, der nur aus einem Knoten besteht.

Dann besteht  $T$  nur aus einem Blatt, und  $B$  hat keinen inneren Knoten. d.h.  $P(B)$  gilt.

## Beispiel 2 ... ctd.

---

(2) Sei  $B \in \text{Bin}$ ,  $B$  nicht in der Basismenge, d.h.  $B = \text{Tree}(B_1, B_2)$ .

**Induktionsvoraussetzung:** Wir nehmen an, dass  $P(B_1), P(B_2)$  gelten.

**Induktionsschluss:** Wir beweisen, dass  $P(B)$  gilt.

**Beweis:** Sei  $B = \text{Tree}(B_1, B_2)$ . Dann gilt:

- $n = n_1 + n_2$ , wobei  $n, n_1, n_2$  Anzahl der Blätter von  $B, B_1$  bzw.  $B_2$  sind.
- mit  $m, m_1, m_2$  als Anzahl innerer Knoten von  $B, B_1$  bzw.  $B_2$ :

$$\begin{aligned} m &= 1 + m_1 + m_2 && \text{nach Definition von } B = \text{Tree}(B_1, B_2) \\ &= 1 + (n_1 - 1) + (n_2 - 1) && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= (n_1 + n_2) - 1 = n - 1. \end{aligned}$$

Somit ist es bewiesen, dass  $\forall B \in \text{Bin}, P(B)$  gilt.