Mehrdimensionale Differentiation und Integration • WS 17/18

Übungsblatt 3

Zur Bearbeitung in der Übung am 06.11.2017

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Vorlesung: Dr. Daniel Habeck
Übungen: David Willems

Download von Übungsblättern, Zusatzmaterial etc.: `http://uni-ko-ld.de/k7`

Aufgabe 3.1

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $f(x) =: c$. Beweisen Sie, dass der Gradient $\operatorname{grad} f(x)$ auf der Niveaufläche $N_f(c) := \{z \in U\colon f(z) = c\}$ senkrecht steht, d. h. dass folgendes gilt: Ist $\varphi\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ mit $\varepsilon > 0$ eine beliebige stetig differenzierbare Kurve mit $\varphi(0) = x$ und $\varphi(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset N_f(c)$, so folgt $\langle \varphi'(0), \operatorname{grad} f(x)\rangle = 0$.

Aufgabe 3.2

Bestimmen Sie den Gradienten von

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x,$

b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = e^{(x-1)^2+(y-2)^2},$

c) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y,z) = x_1\sqrt{x_2 - x_3^2} + x_2^2 \ln(x_3) - e^{x_1x_2}.$

Aufgabe 3.3

a) Berechnen Sie mit der Definition der Richtungsableitung für die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ die Richtungsableitung im Punkt $(0,0)$ Richtung $v = (1,1)$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von

1. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) := (x+z)^2y + x\cos(\pi(y-z))$ im Punkt $(-1,4,2)$ in Richtung $(6,5,1)$.
2. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3+y^2}{x+y} & \text{für } x \neq -y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ im Punkt $(0,0)$ in Richtung $v := \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Aufgabe 3.4

Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene zur Funktion $f(x,y) := x^4 + 2x^3y^2 + y$ im Punkt $(1,1,f(1,1))$.

Aufgabe 3.5

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz

Für eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) φ ist eine lineare Abbildung.

b) Es gibt eine $m \times n$ Matrix A mit $\varphi(h) = Ah$ für alle h in $\mathbb{R}^n$.

Hausübungen

Aufgabe 3.6

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = (x+y)e^{x^2-y^2}$ und der Punkt $P = (0,1)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an f im Punkt P.

Aufgabe 3.7

Eine Schraubenlinie in $\mathbb{R}^3$ hat die Parameterdarstellung

$$f\colon I \to \mathbb{R}^3, \quad f(t) = (\cos(a\cdot t), \quad \sin(a\cdot t), \quad k\cdot t)^\top$$

mit Konstanten $a, k \in \mathbb{R}$. Im folgenden sei $I = [0, 2\pi]$, $a = 4$ und $k = 3$.

a) Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $T(t)$ für $t \in I$.

b) Berechnen Sie den Normalenvektor $T'(t)$ im Punkt $f(t)$.

c) Zeigen Sie, dass die Krümmung

$$k(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|f'(T)\|}$$

der Schraubenlinie konstant ist.

Aufgabe 3.8

Zeigen Sie, dass die Beziehung

$$\operatorname{grad}(fg) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g$$

für partiell differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt.