Übungsblatt 5

Zur Bearbeitung in der Übung am 20.11.2017

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Vorlesung: Dr. Daniel Habeck
Übungen: David Willems

Download von Übungsblättern, Zusatzmaterial etc.: `http://uni-ko-ld.de/k7`

Aufgabe 5.1

a) Gegeben seien die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2.5 \\ 2.5 & -6.25 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition dass die Matrix A aus a) positiv definit ist.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition dass die Matrix B aus a) negativ definit ist.

Aufgabe 5.2

Beweisen Sie, dass für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3y - yx^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

die Reihenfolge der zweiten Ableitungen nicht vertauscht werden kann, also $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Aufgabe 5.3

Beweisen Sie den Satz von Schwarz.

Satz

Sei $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U offen, eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x \in U$ und alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Aufgabe 5.4

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion $f\colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich den Gliedern zweiter Ordnung.

Aufgabe 5.5

Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) \coloneqq \left(4x^2 + y^2\right) \exp\left(-x^2 - 4y^2\right).$$

Entscheiden Sie außerdem, welcher Typ eines lokalen Extremums jeweils vorliegt.

Hausübungen

Aufgabe 5.6

Berechnen Sie alle lokalen Extrema der Funktionen

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) \coloneqq 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$,

b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) \coloneqq 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$.

Welche der lokalen Extrema sind lokale Minima, welche lokale Maxima?

Aufgabe 5.7

a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) \coloneqq e^x \sin(y)\cos(z)$. Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung von f im Punkt $(0,0,0)$.

b) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) \coloneqq \sqrt{x^2+y^2}$ im Punkt $(1,0)$.