Mehrdimensionale Differentiation und Integration • WS 17/18

Übungsblatt 8

Zur Bearbeitung in der Übung am 11.12.2017

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Vorlesung: Dr. Daniel Habeck
Übungen: Dr. David Willems

Download von Übungsblättern, Zusatzmaterial etc.: `http://uni-ko-ld.de/k7`

Aufgabe 8.1

Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) := \left(e^{ct}\cos(t), \quad e^{ct}\sin(t)\right).$$

Die Kurve f heißt logarithmische Spirale.

a) Skizzieren Sie die Kurve für $c = 1/2\pi$ im Bereich $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

b) Für $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve $f_{|[a,b]}$. Berechnen Sie $L_{a,b}$.

c) Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{a \to -\infty} L_{a,0}$?

d) Beweisen Sie, dass die logarithmische Spirale jeden Kreis um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet und berechnen Sie den Cosinus des Schnittwinkels.

Aufgabe 8.2

Sei $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} (0, 0) & \text{falls } t = 0 \\ (t, t\cos(\pi/t)) & \text{falls } t \neq 0. \end{cases}$$

a) Beweisen Sie, dass γ stetig in $t = 0$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die durch γ beschriebene Kurve nicht rektifizierbar ist.

Aufgabe 8.3

Im Büro des Übungsleiters, dessen Fußboden wir uns als die Halbebene $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ vorstellen, hat sich vor der Wand in $x = 0$ eine Staubschicht angehäuft, deren Höhe (in Millimetern) durch die Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = 2e^{-x}$ an der Stelle $(x, y) \in H$ beschrieben wird (wobei wir x und y in Metern messen).

Ein Staubsauger bewegt sich während einer Sekunde gradlinig auf einer Strecke Γ vom Punkt $(2, 0)$ nach $(1, 1)$. Zur Zeit $t \in [0, 1]$ befindet sich die (punktförmige) Düse des Staubsaugers an der Stelle $\gamma(t) := \left(2 - t^2, t^2\right)$. Das pro zurückgelegter Wegstrecke aufgenommene Volumen Staub betrage $V(x, y) := 0{,}2 \cdot h(x, y)$ (in Liter pro Meter). Berechnen Sie das Gesamtvolumen an Staub, welches längs $\mathcal{C}$ eingesaugt wird.

Hausübungen

Aufgabe 8.4

Die Kurve

$$c(t) := (r(t - \sin(t)), \quad r(1 - \cos(t)))$$

beschreibt eine Zykloide.

a) Zeigen Sie, dass die Kurve nicht glatt ist.

b) Berechnen Sie die Länge des Zykloidenbogens $c(t)$ für $0 \leq t \leq 2\pi$.

Hinweis: $1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2)$.

Aufgabe 8.5

Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Kurve γ:

$$\gamma\colon [0, a] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \gamma(t) = (t\cos(t), \quad t\sin(t), \quad t)\,.$$

Die folgende Aufgabe dient der Wiederholung elementarer Integralrechnung, mit der wir uns in den kommenden Wochen intensive beschäftigen werden.

Aufgabe 8.6

Berechnen Sie die folgenden Integrale durch geeignete Umformungen, Symmetrieargumentationen oder Integrationsmethoden.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^6\sin(x) + x^2\cos(x)\right)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2x^2+4}\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) e^{\sqrt{x}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x-3}{x^2-1}\,dx$