Übungsblatt 9

Zur Bearbeitung in der Übung am 18.12.2017

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Vorlesung: Dr. Daniel Habeck
Übungen: Dr. David Willems

Download von Übungsblättern, Zusatzmaterial etc.: `http://uni-ko-ld.de/k7`

Aufgabe 9.1

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\gamma\colon [a, b \to \mathbb{R}^n]$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitzkonstante C_L. Zeigen Sie, dass γ rektifizierbar und $L(\gamma, Z) \leq C_L(b-a)$ für eine Zerlegung Z von $[a, b]$ ist.

Definition

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn eine nichtnegative Konstante L existiert, so dass $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 9.2

Bestimmen Sie die folgenden skalaren bzw. vektoriellen Kurvenintegrale:

a) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t), \quad \sin(t), \quad t)$ und $f(x, y, z) = x^2 + yz$.

b) γ ist die Verbindungsstrecke von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ und $v(x, y) = (2y, \quad e^x)$.

Aufgabe 9.3

Gegeben seien die Vektorfelder $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $w\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$v(x, y) := (x^2 - y, \quad x + y^2) \quad \text{und} \quad w(x, y) := (x + y^2, \quad 2xy).$$

Berechnen Sie sowohl für v als auch für w jeweils das Kurvenintegral von $A = (0, 1)$ nach $B = (1, 2)$

a) längs der Verbindungsgeraden,

b) längs des Streckenzugs bestehend aus den Strecken von A nach $(1, 1)$ und von $(1, 1)$ nach B, sowie

c) längs der Parabel $y = x^2 + 1$.

Hausübungen

Aufgabe 9.4

a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $U \neq \emptyset$ und $U \neq \mathbb{R}^n$. Zwei Punkte $a, b \in U$ heißen *wegzusammenhängend* (in Zeichen $a \sim b$), wenn es in U einen sie verbindenden Weg gibt. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn alle Punkte $a, b \in U$ wegzusammenhängend sind. Es existiert also für alle $a, b \in U$ ein Weg $\gamma\colon [0, 1] \to U$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$.

   Beweisen Sie, dass ε-Umgebungen $B_\varepsilon(x_0)$ für $x_0 \in U$ stets wegzusammenhängend sind[1].

[1] *Hinweis:* O. B. d. A. können sie sich auf die Nullumgebung beschränken.

c) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ stetig. Beweisen sie, dass dann auch $f(U)$ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 9.5

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ das beschränkte Gebiet, das durch die beiden Graphen der Funktionen $x = 1 - \frac{1}{4}y^2$ und $x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ begrenzt wird. Außerdem sei das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $v(x, y) = (xy, \quad y^2)$ gegeben.

a) Parametrisieren Sie die G begrenzende Kurve.

b) Berechnen Sie $\oint_{\partial G} v \, ds$[2].

[2] Hierbei bezeichne ∂G den Rand von G, $\oint$ symbolisiert, dass es sich um eine geschlossene Kurve handelt.