

Mehrdimensionale Differentiation und Integration
1. Klausur 20.02.2017

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Lassen Sie Ihr Exemplar bitte zusammengeheftet und bearbeiten Sie jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt (Vorderseite und bei Bedarf Rückseite). Sollte Ihre Lösung länger als zwei Seiten sein, können Sie sie auf einem Zusatzblatt (mit Namen versehen) fortsetzen. Teilen Sie dies bitte bei der Abgabe der aufsichtsführenden Person mit.

Schmierblätter, die Sie nach Bedarf nach Beginn der Klausur erhalten, geben Sie bitte nicht ab.

Bei allen 7 Aufgaben sind 10 Punkte erreichbar. Hilfsmittel (ausser Schreibgeräten, Radiergummi usw.) sind keine zugelassen.

Das Ergebnis der Klausur wird Ihnen per Email/KLIPS mitgeteilt.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte								

bestanden:

Note:

Aufgabe 1:

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 y + x^5}{x^4 + y^4} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f in $(0, 0)$.
- b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f in allen $(x, y) \neq (0, 0)$.
- c) Untersuchen Sie, ob f in $(0, 0)$ stetig ist.

Lösung:

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die Funktionalmatrix von $h = f \circ g$ im Punkte $(1, 2)$ für

$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^3, g(x, y) := \left(\frac{1}{x}, 2 + y^2, x^2 - 3y\right)$$

und

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(u, v, w) := (u - v, uvw^2, 3v + w) .$$

b) Untersuchen Sie anhand der Definition, ob

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^5}{x^4 + y^4} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in $(0, 0)$ total differenzierbar ist.

Lösung:

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie für

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := x^2 e^y + 2y$$

das Taylorpolynom zweiten Grades um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

b) Berechnen Sie für f aus a) die Richtungsableitung in $(1, 3)$ in Richtung $v = (\frac{5}{13}, -\frac{12}{13})$.

c) Untersuchen Sie, in welchen Punkten

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) := (x^2 + y^4, x^3 y)$$

lokal injektiv ist.

Lösung:

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie alle Extrempunkte von

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$$

und untersuchen Sie, ob ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum vorliegt.

b) Untersuchen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren, wo

$$f :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := \frac{1}{x} + \frac{4}{y}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) := \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 4 = 0$$

ein Extremum besitzen kann.

Lösung:

Aufgabe 5:

a) Verifizieren Sie den Hauptsatz für Kurvenintegrale, indem Sie für

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y) := x(1 + y^2)$$

das Kurvenintegral $\int_C \langle \nabla F, dx \rangle$ für die $(x_0, y_0) := (0, 1)$ und $(x_1, y_1) := (2, 0)$ verbindenden Kurven C_1, C_2 mit den Parameterdarstellungen $\sigma_i, i = 1, 2$ berechnen mit

(i) $\sigma_1 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \sigma_1(t) := (t, 1 - \frac{1}{2}t)$

(ii) $\sigma_2 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \sigma_2(t) := \begin{cases} (t, 1 - t) & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ (t, 0) & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

b) Untersuchen Sie, ob k ein konservatives Kraftfeld ist für

(i) $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, k(x, y) := (2xy^3 + 2, 3x^2y^2 - e^y),$

(ii) $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, k(x, y) := (\frac{2xy}{1+\sqrt{1+x^2}} - 12xy^2, y \ln(1+x^2) - 4yx^3)$ und

(iii) geben Sie eine Potentialfunktion für k an, sofern k ein konservatives Kraftfeld ist.

Lösung:

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Länge L

- a) der Kurve C mit der Parameterdarstellung $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \sigma(t) := (t, \cosh t)$,
b) der Kurve C mit der Parameterdarstellung $\sigma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \sigma(t) := (\frac{1}{\sqrt{t}}, t^2)$.

Leiten Sie L in b) nur so weit her, bis Sie ein Integral erhalten, welches nicht mehr elementar integrierbar ist.

- c) Berechnen Sie die Kurvenintegrale des Skalarfeldes f längs der Kurve C für

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := (x + \sqrt{y})$$

und C des Teiles der Parabel $y = x^2$, das von der Geraden $y = 2x$ abgeschnitten wird.

Lösung:

Aufgabe 7:

a) Berechnen Sie

(i) $\int_G (xy + 3x^2) d(x, y)$ für $G := [-1, 1] \times [1, 2]$.

(ii) $\int_G 2x \sin y d(x, y)$ für $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationsformel

$$\int_G xy^2 d(x, y)$$

für $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$ und Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi. \end{aligned}$$

Lösung: