

**Mehrdimensionale Differentiation und Integration**  
**2. Klausur 03.04.2017**

**Name:**

**Vorname:**

**Matrikel-Nr.:**

**Studiengang:**

Lassen Sie Ihr Exemplar bitte zusammengeheftet und bearbeiten Sie jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt (Vorderseite und bei Bedarf Rückseite). Sollte Ihre Lösung länger als zwei Seiten sein, können Sie sie auf einem Zusatzblatt (mit Namen versehen) fortsetzen. Teilen Sie dies bitte bei der Abgabe der aufsichtsführenden Person mit.

Schmierblätter, die Sie nach Bedarf nach Beginn der Klausur erhalten, geben Sie bitte nicht ab.

Bei allen 7 Aufgaben sind 10 Punkte erreichbar. Hilfsmittel (ausser Schreibgeräten, Radiergummi usw.) sind keine zugelassen.

Das Ergebnis der Klausur wird Ihnen per Email/KLIPS mitgeteilt.

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Summe |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|-------|
| Punkte  |   |   |   |   |   |   |   |       |

**bestanden:**

**Note:**



**Aufgabe 1:**

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von  $f$  in  $(0, 0)$ .
- b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von  $f$  in allen  $(x, y) \neq (0, 0)$ .
- c) Zeigen Sie, dass  $f$  in  $(0, 0)$  stetig, jedoch in  $(0, 0)$  nicht total differenzierbar ist.

**Lösung:**



**Aufgabe 2:**

(i) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  das Vektorfeld

$$f(x, y) = (xy - e^x, x \sin(xy))$$

und  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion

$$g(u, v) = uv - 1 .$$

- a) Berechnen Sie die zusammengesetzte Funktion  $F = g \circ f$ .
- b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von  $F$  direkt mit Hilfe des in Teilaufgabe a) gefundenen expliziten Terms.
- c) Berechnen Sie den Gradienten  $\nabla F$  von  $F$  mit Hilfe der Kettenregel

$$\nabla F(x, y) = \nabla g(f(x, y)) \cdot J_f(x, y) .$$

(ii) In  $\mathbb{R}^3$  ist für  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$  das Vektorprodukt

$$a \times b := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

definiert. Zeigen Sie:

Sind  $(a_k)$  und  $(b_k)$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}^3$  mit  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \alpha$  und  $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \beta$ , so gilt

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_k \times b_k) = \alpha \times \beta .$$

**Lösung:**





**Aufgabe 3:**

a) Bestimmen Sie für

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := x \cdot \sin y - y \cdot \sin x$$

das Taylorpolynom zweiten Grades um den Entwicklungspunkt  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) := \left(x + \frac{1}{2}y^2, y + \frac{1}{2}x^2\right)$$

lokal injektiv ist.

**Lösung:**



**Aufgabe 4:**

a) Bestimmen Sie alle Extrempunkte von

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

und untersuchen Sie, ob ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum vorliegt.

b) Das Risiko bei einem Portfolio aus drei Aktien ist gegeben durch

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 ,$$

wobei

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

und  $\alpha_j \in [0, 1]$  die Anteile sind, die in der j-ten Aktie veranlagt wurden. Bei welchen Anteilen ergibt sich das minimale Risiko?

**Hinweis:** Sie können b) mit der Methode der Lagrange - Multiplikatoren lösen oder die Nebenbedingung  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$  benutzen, um eine Variable (z. B.  $\alpha_3$ ) zu eliminieren.

**Lösung:**





**Aufgabe 5:**

a) Verifizieren Sie den Hauptsatz für Kurvenintegrale, indem Sie für

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y) := -\frac{y}{1+x^2}$$

das Kurvenintegral  $\int_C \langle \nabla F, dx \rangle$  für die  $(x_0, y_0) := (0, -1)$  und  $(x_1, y_1) := (1, -4)$  verbindenden Kurven  $C_1, C_2$  mit den Parameterdarstellungen  $\sigma_i, i = 1, 2$  berechnen mit

(i)  $\sigma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \sigma_1(t) := (t, -1 - 3t)$

(ii)  $\sigma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \sigma_2(t) := \begin{cases} (0, -6t - 1) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2t - 1, -4) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

b) Untersuchen Sie, ob  $k$  ein konservatives Kraftfeld ist für

(i)  $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, k(x, y) := (xy^2, xy),$

(ii)  $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, k(x, y) := (ye^x, e^x - \cos y)$  und

(iii) geben Sie eine Potentialfunktion für  $k$  an, sofern  $k$  ein konservatives Kraftfeld ist.

**Lösung:**





**Aufgabe 6:**

Bestimmen Sie die Bogenlänge  $L$

a) der Kurve  $C$  (Asteroide) mit der Parameterdarstellung

$$\sigma : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^2, \sigma(t) := (t, (a^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}),$$

wobei  $a > 0$  eine vorgegebene Konstante sei.

b) Berechnen Sie die Masse  $\int_C \varrho \, ds$  einer Schraubenfeder mit der Massendichte

$$\varrho(x, y, z) := xyz$$

und  $C$  der Schraubenfeder mit der Parametrisierung

$$\sigma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3, \sigma(t) := (R \cos t, R \sin t, ht).$$

Dabei seien  $h, R > 0$  vorgegebene Konstanten.

**Hinweis:** Beachten Sie die trigonometrische Formel  $\sin(2t) = 2 \cos t \cdot \sin t$ .

**Lösung:**



**Aufgabe 7:**

a) Berechnen Sie

(i)  $\int_G e^{x+y} d(x, y)$  für  $G := [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$ .

(ii)  $\int_G x^2 e^{xy} d(x, y)$  für  $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1\}$ .

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationsformel

$$\int_G x^2 + y^2 d(x, y)$$

für  $G := B_R(0, 0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  und Polarkoordinaten

$$x = r \cos \phi,$$

$$y = r \sin \phi .$$

**Lösung:**

