Vorlesung: Dr. Daniel Habeck
Übungen: David Willems

Download von Übungsblättern, Zusatzmaterial etc.: `http://uni-ko-ld.de/k7`

Aufgabe 4.4

Berechnen Sie für die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1,x_2,x_3) := \left(\sin(x_1)x_2^2 - 5x_3^2, \quad x_1^2 e^{x_2} + x_3\right)$$
$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x_1,x_2) := \left(3x_1 + x_2^2, \quad 1, \quad e^{x_1}x_2\right)$$

die Jacobimatrix $\mathcal{J}_{g\circ f}(x_1,x_2,x_3)$ der Verkettung $g \circ f$.

Lösung zu Aufgabe 4.4

Zunächst berechnen wir die Verkettung $g \circ f$:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x_1,x_2,x_3) &= g(f(x_1,x_2,x_3)) \\ &= \left(3\left(\sin(x_1)x_2^2 - 5x_3^2\right) + \left(x_1^2 e^{x_2} + x_3\right)^2, \quad 1, \quad e^{\sin(x_1)x_2^2 - 5x_3^2}\cdot\left(x_1 e^{x_2} + x_3\right)\right)\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Jacobi-Matrix von $g \circ f$

$$\mathcal{J}_{g\circ f} := \begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial (g\circ f)_3}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial (g\circ f)_3}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial (g\circ f)_3}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) &= 4x_1\left(x_1^2 e^{2x_2} + e^{x_2}x_3\right) + 3x_2^2\cos(x_1) \\ \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1^4 e^{2x_2} + 2x_1^2 e^{x_2}x_3 + 6x_2\sin(x_1) \\ \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) &= 2(x_1^2 e^{x_2} - 14x_3)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial (g\circ f)_3}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) &= e^{x_2^2\sin(x_1) - 5x_3^2}\left(x_2^2 x_3\cos(x_1) + x_1 e^{x_2}x_2^2\cos(x_1) + e^{x_2}\right) \\ \frac{\partial (g\circ f)_3}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) &= e^{x_2^2\sin(x_1) - 5x_3^2}\left(2x_2x_3\sin(x_1) + x_1e^{x_2} + 2x_1e^{x_2}x_2\sin(x_1)\right) \\ \frac{\partial (g\circ f)_3}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) &= e^{x_2^2\sin(x_1) - 5x_3^2}\left(10x_1e^{x_2}x_3 - 10x_3^2 + 1\right).\end{aligned}$$

Alternativ lässt sich die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_{g\circ f}(x_1, x_2, x_3)$ auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{g\circ f}(x_1, x_2, x_3) &\coloneqq \mathcal{J}_g(f(x_1, x_2, x_3)) \cdot \mathcal{J}_f(x_1, x_2, x_3) \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2\left(x_1^2 e^{x_2} + x_3\right) \\ 0 & 0 \\ e^{\sin(x_1)x_2^2 - 5x_3} \cdot \left(x_1^2 e^{x_2} + x_3\right) & e^{\sin(x_1)x_2^2 - 5x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2^2 \cos(x_1) & 2x_2 \sin(x_1) & -10x_3 \\ 2x_1 e^{x_2} & x_1 e^{x_2} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$