Übungsblatt 10 (mit Lösungshinweisen)

Zur Bearbeitung in der Übung am 08.01.2018

Vorlesung: Dr. Daniel Habeck
Übungen: Dr. David Willems

Die Lösungshinweise auf diesem Blatt sind an manchen Stellen knapp gehalten. Fehler in den Lösungshinweisen sind (wie immer) nicht ausgeschlossen. Falls sie einen Fehler finden, teilen Sie ihn mir bitte per E-Mail mit.

Im Gegensatz zu den anderen Übungsblättern wird dieses Blatt nur eine befristete Zeit online sein. Sichern Sie sich daher eine lokale Kopie.

Aufgabe 10.1

Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißen *äquivalent*, falls es Konstanten $a, b \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass

$$a\|x\|' \leq \|x\| \leq b\|x\|'$$

für alle $x \in V$ gilt. Da äquivalente Normen dieselbe Topologie auf V induzieren, kommt es also nicht darauf an, welche der beiden Normen man zur Definition des Begriffs *Offenheit* verwendet.

Beweisen Sie den folgenden

Satz

Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

Lösung zu Aufgabe 10.1

Es genügt zu zeigen, dass jede gegebene Norm $\|\cdot\|$ zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent ist. Wir gehen dazu in drei Schritten vor:

a) Wir zeigen als Erstes, dass es eine Zahl $b \in \mathbb{R}^+$ gibt so dass

$$\|x\| \leq b \cdot \|x\|_\infty \tag{1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dazu betrachten wir die Entwicklung von x nach den kanonischen Einheitsvektoren e_i, also $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Damit ergibt sich

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|x\|_\infty \cdot \|e_i\|.$$

Mit $b := \sum_{i=1}^n \|e_i\|$ ist daher ein entsprechendes b gefunden, so dass (1) erfüllt ist.

b) Es sei nun $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$ die Einheitssphäre bezüglich der Maximumsnorm. Die Abbildung $x \mapsto \|x\|$ ist stetig bezüglich der Maximumsnorm, dies folgt aus der Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq b \cdot \|x - y\|_\infty$$

für $x, y \in \mathbb{R}^n$. Im letzten Schritt haben wir (1) aus Schritt a) angewandt.

c) Die Einheitssphäre ist bezüglich der Maximumsnorm kompakt und die Abbildung aus b) ist stetig. Daher nimmt f auf S ein Minimum a an. Da f nur positive Werte hat, ist $a > 0$. Aus $\|x\| > a$ für alle $x \in S$ folgt

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq a \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

also

$$\|x\| \geq a \cdot \|x\|_\infty \tag{2}$$

Durch (1) und (2) ist nun die Äquivalenz der beiden Normen bewiesen.

Aufgabe 10.2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und seien $f, g \colon U \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Für jedes $x \in U$ werde definiert

$$\varphi(x) \coloneqq \max\left(f(x), g(x)\right) \quad \text{sowie} \quad \psi(x) \coloneqq \min\left(f(x), g(x)\right).$$

Zeigen Sie, dass $\varphi, \psi \colon U \to \mathbb{R}$ stetig sind.

Lösung zu Aufgabe 10.2

Schreibe die beiden Funktionen φ, ψ um zu

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\right) \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\right). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der (reellen) Betragsfunktion und den Rechenregeln für stetige Funktionen.

Aufgabe 10.3

Es sei $a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ eine unendliche Zahlenfolge mit $a_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ sowie X die Menge aller solchen Zahlenfolgen. Zeigen Sie, dass durch

$$d(a, b) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}$$

eine Metrik auf X definiert wird.

Lösung zu Aufgabe 10.3

Um zu zeigen, dass d eine Metrik ist, müssen wir für alle $x, y, z \in X$ die drei Eigenschaften a) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, b) $d(x, y) = d(y, x)$ und c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ nachweisen.

Im Folgenden seien $x, y, z \in X$ beliebige Folgen.

a) Offensichtlich ist $d(x, y) \geq 0$, da alle Terme innerhalb der Summe nichtnegativ sind. Den Beweis $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ führen wir in zwei Richtungen:

   - $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$: Klar durch Einsetzen in die Reihe.

- $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$: Der Faktor 2^{-k} in der Reihe ist immer positiv. Damit also das Produkt (und damit die Reihe) Null sein kann, muss $|x_k - y_k| = 0$ für alle k sein. Dies ist jedoch gleichbedeutend mit $x = y$.

b) Die Symmetrie folgt direkt aus der Symmetrie des reellen Betrags.

c) Es verbleibt die Dreiecksungleichung zu zeigen.

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - z_k + z_k - y_k|}{1 + |x_k - z_k + z_k - y_k|} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \left(\frac{|x_k - z_k| + |z_k - y_k|}{1 + (|x_k - z_k| + |z_k - y_k|)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-k} \frac{|x_k - z_k|}{1 + (|x_k - z_k| + |z_k - y_k|)} + 2^{-k} \frac{|z_k - y_k|}{1 + (|x_k - z_k| + |z_k - y_k|)} \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - z_k|}{1 + |x_k - z_k|} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|z_k - y_k|}{1 + |z_k - y_k|} \\
&= d(x,z) + d(z,y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.4

Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3 y + x^5}{x^4 + y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f in allen $(x,y) \neq (0,0)$.

b) Untersuchen Sie, ob die Funktion f in $(0,0)$ partiell differenzierbar ist.

c) Untersuchen Sie, ob f in $(0,0)$ stetig ist.

Lösung zu Aufgabe 10.4

a) f ist in allen Punkten ungleich $(0,0)$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(3x^2 y + 5x^4)(x^4 + y^4) - (4x^3)(x^3 y + x^5)}{(x^4 + y^4)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^3(x^4 + y^4) - 4y^3(x^3 y + x^5)}{(x^4 + y^4)^2}
\end{aligned}$$

b) Wir überprüfen die partielle Differenzierbarkeit im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ mit Hilfe der Definition:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h \cdot e_1) - f(x_0, y_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} \\
&= \boxed{1} \\
\lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h \cdot e_2) - f(x_0, y_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - 0}{h}
\end{aligned}$$

$$= \boxed{0}.$$

Die Funktion f ist also partiell differenzierbar im Punkt $(0,0)$ und es gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

c) Die Funktion f ist nicht stetig, denn für die Folge $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \to (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) &= \frac{\frac{1}{k^3} \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{k^5}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} \\ &= \frac{k+1}{2k} \longrightarrow \frac{1}{2} \neq f(0,0) \end{aligned}$$

Aufgabe 10.5

a) Sei $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,t) \coloneqq t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right).$$

Zeigen Sie, dass $F(x,t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\Delta F - \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ ist[1].

b) Sei $c > 0$, $k \in \mathbb{R}^n$ und $\omega = \|k\|c$. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktion. Verifizieren Sie: Die Funktion

$$F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x,t) \coloneqq f\left(\langle k, x\rangle - \omega t\right)$$

ist eine Lösung der Wellengleichung $\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$.

Lösung zu Aufgabe 10.5

a) Unter Verwendung der Produkt- und Kettenregel schließt man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \Delta F(x,t) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x,t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \underbrace{\left(t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \cdot \frac{1}{4t}\right)\right)}_{=F(x,t)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(F(x,t) \cdot \frac{-x_i}{2t}\right) \\ &= \dots \\ &= F(x,t)\left(\frac{1}{4t^2}\|x\|^2 - \frac{n}{2t}\right) \end{aligned}$$

[1] In diesen beiden Teilaufgaben bezieht sich der Laplace-Operator Δ ausschließlich auf die ersten n (räumlichen) Koordinaten des Problems.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(t^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\sum_{j=1}^{n}x_j^2\cdot\frac{1}{4t}\right)\right)}_{=F(x,t)}\\ &= \frac{-n}{2t}F(x,t)+\frac{1}{4t^2}\|x\|^2F(x,t)\\ &= \dots\\ &= \Delta F(x,t),\end{aligned}$$

also

$$\Delta F-\frac{\partial F}{\partial t}=0$$

b) Setzen wir $k=(k_1,\dots,k_n)$, so lautet F ausgeschrieben

$$F(x,t)=f(\langle k,x\rangle-\omega t)=f(\langle k,x\rangle-\|k\|ct)=f\left(\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu x_\nu-\|k\|ct\right).$$

Für $i=1,\dots,n$ gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t) &= f'(\langle k,x\rangle-\|k\|ct)\cdot k_i\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x,t) &= f''(\langle k,x\rangle-\|k\|ct)\cdot k_i^2.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\Delta F(x,t) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2F}{\partial x_i^2}(x,t)\\ &= f''(\langle k,x\rangle-\|k\|ct)\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i^2\\ &= \|k\|^2\cdot f''(\langle k,x\rangle-\|k\|ct)\end{aligned}$$

Ferner erhält man für die partiellen Ableitungen nach t mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) &= f'(\langle k,x\rangle-\|k\|ct)\cdot(-\|k\|c)\\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x,t) &= f''(\langle k,x\rangle-\|k\|ct)\cdot(-\|k\|c)^2\\ &= \|k\|^2c^2\cdot f''(\langle k,x\rangle-\|k\|ct).\end{aligned}$$

Damit ist

$$\Delta F-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2F}{\partial t^2}=0.$$

Aufgabe 10.6

Für welche Werte $a\in\mathbb{R}$ ist die Matrix $A=\begin{pmatrix}3&4&1\\4&6&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ positiv bzw. negativ definit?

Hinweis: Anstatt die Eigenwerte der Matrix A zu berechnen, können Sie auch das Untermatrizen-Kriterium aus der Vorlesung zu benutzen: Sei $A = (a_{ij})$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Ferner seien für $k = 1, 2, \dots, n$ die Untermatrizen $A_k := (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k}}$ definiert. Dann gilt:

a) Ist $\det A_k > 0$ für alle $k = 1, \dots, n$, dann ist A positiv definit.

b) Sind die Zahlen $\det A_1$, $\det A_2$, …, $\det A_n = \det A$ abwechselnd negativ und positiv, so ist A negativ definit.

Lösung zu Aufgabe 10.6

Wir berechnen die Determinanten der Hauptminoren: $\det A_1 = 3 > 0$ (somit kann A *nie* negativ definit sein), $\det A_2 = 2 > 0$ und $\det A = 2a - 1$. Damit A positiv definit ist, muss $\det A > 0$ sein, also $a > \frac{1}{2}$.

Aufgabe 10.7

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ und untersuchen Sie, ob ein lokales Maximum oder Minimum vorliegt.

b) Sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) := ax^3 + by^2 + 2xy$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass

   1. im Punkt $(1, -1)$ ein lokales Minimum vorliegt und
   2. die Einschränkung $F|_{x=-y}$ für $x = 0$ einen Wendepunkt hat.

c) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := 5x + y - 3z$ auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Lösung zu Aufgabe 10.7

a) Um die kritischen Stellen zu finden, bestimmen wir die Nullstellen des Gradienten von f. Es gilt $\operatorname{grad} f = (2x + y + 1, x + 2y - 1)$. Der Gradient hat ausschließlich die Nullstelle $(x_0, y_0) = (-1, 1)$. Zur Charakterisierung des Kandidaten für einen Extrempunkt bestimmen wir die Hessematrix $H_f(x, y)$. Hier ist $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Diese Matrix ist nach dem Hauptminorenkriterium positiv definit (EWe: 1 und 3.), es liegt daher ein lokales Minimum vor.

b) Wie in der Übung besprochen ist diese Aufgabe fehlerhaft und nicht lösbar. Siehe Übungsblatt 11.

c) Betrachte die Lagrange-Funktion zum gegebenen Extremums-Problem

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = 5x + y - 3z + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Damit erhalten wir das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x &= 5 + \lambda + 2\mu x && = 0 \\
\mathcal{L}_y &= 1 + \lambda + 2\mu y && = 0 \\
\mathcal{L}_z &= -3 + \lambda + 2\mu z && = 0 \\
\mathcal{L}_\lambda &= x + y + z && = 0 \\
\mathcal{L}_\mu &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 && = 0
\end{aligned}$$

Addiert man die ersten drei Gleichungen, so erhält man in Verbindung mit der vierten $3 + 3\lambda = 0$, also $\lambda = -1$. Damit gehen die beiden ersten Gleichungen über in $4 + 2\mu x = 0$ und $2\mu y = 0$. Aus ihnen folgt, dass $\mu \neq 0$ und $y = 0$ sein muss. Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich nun $z = -x$ und $2x^2 = 1$, also $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Durch Einsetzen verifiziert man, dass die Punkte $(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sowie $(x_2, y_2, z_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ das Gleichungssystem mit $\lambda = -1$ und $\mu = \mp 2\sqrt{2}$ erfüllen.

Um die gefundenen kritischen Punkte zu charakterisieren werten wir die Hessematrix auf dem Tangentialraum aus. Dazu bestimmen wir zunächst die Hessematrix $H_{\mathcal{L}}$ bezüglich x, y, z:

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{L}}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{xz} \\ \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} & \mathcal{L}_{yz} \\ \mathcal{L}_{zx} & \mathcal{L}_{zy} & \mathcal{L}_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ferner gilt für den Tangentialraum $T_{x,y,z} = (\operatorname{span}(\nabla g_1, \nabla g_2))^{\perp} = \operatorname{span}(\nabla g_1 \times \nabla g_2)$. Mit den Gradienten $\nabla g_1 = (1,1,1)$ und $\nabla g_2 = (2x, 2y, 2z)$ der Nebenbedingungen folgt

$$\nabla g_1 \times \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2z - 2y \\ 2x - 2z \\ 2y - 2x \end{pmatrix}.$$

Für $(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ist $T_{x_1,y_1,z_1} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right) = a \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$. Mit $\mu = -2\sqrt{2}$ folgt dann

$$\begin{aligned} \langle \begin{pmatrix} -a\sqrt{2} \\ 2a\sqrt{2} \\ -a\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a\sqrt{2} \\ 2a\sqrt{2} \\ -a\sqrt{2} \end{pmatrix} \rangle &= \langle \begin{pmatrix} -a\sqrt{2} \\ 2a\sqrt{2} \\ -a\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8a \\ -16a \\ 8a \end{pmatrix} \rangle \\ &= -8a^2\sqrt{2} - 32a^2\sqrt{2} - 8a^2\sqrt{2} \\ &= -48a^2\sqrt{2} < 0 \forall a. \end{aligned}$$

Im Punkt (x_1, y_1, z_1) liegt also ein Maximum vor. Analog rechnet man nach, dass im Punkt (x_2, y_2, z_2) ein Minimum vorliegt.

Aufgabe 10.8

a) Untersuchen Sie, in welchen Punkten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \coloneqq \left(x^2 + y^4, \quad x^3 y\right)$ lokal injektiv ist.

b) Bestimmen Sie für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) \coloneqq x^2 e^y + 2y$ das Taylorpolynom zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

c) Berechnen Sie für f aus b) die Richtungsableitung in $(1,3)$ in Richtung $v = \left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right)$.

d) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) \coloneqq x^5 + y^4 - 4xy - 11x + 2$.

   1. Zeigen Sie, dass durch $f(x,y) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(1,2)$ eine Funktion $y = y(x)$ definiert wird.

2. Berechnen Sie $y'(1)$.
3. Berechnen Sie näherungsweise $y(1.1)$.

Lösung zu Aufgabe 10.8

a) Die Funktion f ist in einem Punkt (x_0, y_0) lokal injektiv, wenn die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_f(x, y)$ von f in (x_0, y_0) invertierbar ist.

$$\mathcal{J}_f(x,y) := \begin{pmatrix} 2x & 4y^3 \\ 3x^2y & x^3 \end{pmatrix}, \quad \det \mathcal{J}_f(x,y) = 2x^4 - 12x^2y^4 = x^2\left(2x^2 - 12y^4\right).$$

Die Matrix $\mathcal{J}_f(x, y)$ ist also für Punkte auf der x-Achse oder Punkte auf der Parabel $y = \pm\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{6}}$ nicht invertierbar.

b) Zunächst bestimmen wir die partiellen Ableitungen von f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2e^y + 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2e^y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2xe^y$$

Mit $(\xi, \eta) \to (0, 0)$ ergibt sich für das Taylorpolynom zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} f(2+\xi, 0+\eta) &= f(2,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,0)\frac{\xi^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,0)\frac{\eta^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,0)\xi\eta \\ &= 4 + 4\xi + 6\eta + \xi^2 + 2\eta^2 + 4\xi\eta \end{aligned}$$

c) Gemäß der Vorlesung berechnet sich die Richtungsableitung als Skalarprodukt des Gradienten mit dem (normierten) Richtungsvektor. Hier ist also

$$D_v f(1,3) = \langle \operatorname{grad} f(1,3), v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2e^3 \\ e^3 + 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{5}{12} \\ -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{5}{6}e^3 - \frac{12}{13}e^3 - \frac{24}{13.}$$

d)
1. Für die gegebene Funktion f gilt im betrachteten Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$ $f(1, 2) = 1 + 16 - 8 - 11 + 2 = 0$. Ferner gilt $\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 - 4y - 11$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$, die partiellen Ableitungen sind also stetig. Weiterhin ist $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 28 \neq 0$. Folglich ist in der Umgebung des Punktes $(1, 2)$ durch die implizite Vorschrift $F(x, y) = 0$ eine Funktion $y = y(x)$ definiert.
2. Es gilt nach den Resultaten der Vorlesung

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{5x^4 - 4y - 11}{4y^3 - 4x}$$

In $(x_0, y_0) = (1, 2)$ ist also

$$y'(1) = \frac{1}{2}.$$

3. Wir bestimmen den Wert von $y(1.1)$ durch Taylorentwicklung bis zum linearen Glied, also $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. Demnach ist $y(1.1) \approx y(1) + y'(1)(1.1 - 1) = 2 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 = 2.05$.

Aufgabe 10.9

a) Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz des folgenden Vektorfeldes $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$v(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2xz^3 + 6y \\ 6x - 2yz \\ 3x^2z^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

b) Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld und $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Differentialoperatoren:

1. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ (Gradientenfelder sind wirbelfrei).
2. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$ (Wirbelfelder sind quellenfrei).

Lösung zu Aufgabe 10.9

a) Für die Rotation $\operatorname{rot} v$ erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} v = \nabla \times v(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2xz^3 + 6y \\ 6x - 2yz \\ 3x^2z^2 - y^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2y + 2y \\ 6xz^2 - 6xz^2 \\ 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Divergenz $\operatorname{div} v$ erhält man

$$\operatorname{div} v = \langle \nabla, v \rangle = 2z^3 - 2z + 6x^2z.$$

b)
1. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_2\partial_3 f - \partial_3\partial_2 f \\ \partial_3\partial_1 f - \partial_1\partial_3 f \\ \partial_1\partial_2 f - \partial_2\partial_1 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da für f der Satz von Schwarz gilt.

2. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} v) &= \left\langle \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \partial_1\partial_2 v_3 - \partial_1\partial_3 v_2 + \partial_2\partial_3 v_1 - \partial_2\partial_1 v_3 + \partial_3\partial_1 v_2 - \partial_3\partial_2 v_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

da für v der Satz von Schwarz gilt.

Aufgabe 10.10

a) Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 \cos(x_2)\sin(x_3)$. Bestimmen Sie $D^\alpha f(x)$ sowie $D^\beta f(x)$ für die Multiindizes $\alpha = (1,1,0)$ und $\beta = (0,1,2)$.

b) Beschreiben Sie die Funktion $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x) \mapsto x_1 x_2^3 x_1$ durch einen geeigneten Multiindex α in der Form $g\colon x \mapsto x^\alpha$.

c) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex. Beweisen Sie, dass $|x^\alpha|_2 \leq \|x\|_2^{|\alpha|}$ gilt.

d) Gegeben seien die zwei Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ sowie die Funktion $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$. Bestimmen Sie $D^\beta h(x)$.

Lösung zu Aufgabe 10.10

a) Es ist $D^{(1,1,0)}f(x) = -\sin(x_2)\sin(x_3)$ und $D^{(0,1,2)}f(x) = x_1 \sin(x_2)\sin(x_3)$.

b) $g\colon x \mapsto x^{(2,3,0)}$.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}|x^\alpha| &= \left|\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}\right| = \prod_{i=1}^n |x_i|^{\alpha_i}\\ &\leq \prod_{i=1}^n \|x\|_2^{\alpha_i} = \|x\|_2^{\sum \alpha_i} = \|x\|_2^{|\alpha|}.\end{aligned}$$

d) Gilt für einen Index $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die Ungleichung $\beta_i \geq \alpha_i$, so gilt

$$D^\beta h(x) = 0$$

für alle x. Ansonsten gilt

$$D^\beta h(x) = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{(\alpha-\beta)}.$$

Aufgabe 10.11

a) Berechnen Sie die Länge des Funktionsgraphen $y(x) = \sqrt{x^3}$ für $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\gamma(t) = \big(a\cos^3(t),\quad a\sin^3(t)\big)$ mit $a > 0$ für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

c) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) := (t,\quad \cosh(t))$.

Lösung zu Aufgabe 10.11

a) Es ist $y(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $y'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ und $\big(y'(x)\big)^2 = \frac{9}{4}x$. Damit ergibt sich

$$L = \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx$$

Substitution: $u = 1 + \frac{9}{4}x$, $\frac{du}{dx} = \frac{9}{4}$:

$$\begin{aligned}&= \frac{4}{9}\int_1^4 \sqrt{u}\,du = \frac{4}{9} \cdot \left.\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_1^4\\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{14}{3} = \frac{56}{27}\end{aligned}$$

b) Es ist $\gamma'(t) = \big(3a\cos^2(t)(-\sin(t)), \quad 3a\sin^2(t)\cos(t)\big)$ und damit

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{9a^2\cos^4(t)\sin^2(t) + 9a^2\sin^4(t)\cos^2(t)} \\ &= \sqrt{9a^2\cos^2(t)\sin^2(t)\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right)} \\ &= 3a\sin(t)\cos(t)\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Bogenlänge von γ:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin(t)\cos(t)\,dt$$

Mit der Substitution $u = \cos(t)$, $\frac{du}{dt} = -\sin(t)$:

$$\begin{aligned}&= 3a\int_{\cos(0)}^{\cos(\frac{\pi}{2})} -u\,du = 3a\int_0^1 u\,du \\ &= \frac{3}{2}a\end{aligned}$$

c) Es ist $\sigma'(t) = (1, \quad \sinh(t))$ und damit

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{1^2 + \sinh^2(t)} = \cosh(t).$$

Damit ergibt sich für die Bogenlänge von σ:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sigma) &= \int_0^1 \cosh(t)\,dt \\ &= \sinh(x)|_0^1 \\ &= \sinh(1).\end{aligned}$$

Aufgabe 10.12

Beweisen Sie, dass für jedes $k \in [0,1]$ das uneigentliche Integral

$$E(k) := \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

existiert. Man nennt $E(k)$ *vollständiges elliptisches Integral*, $E(k)$ kann nicht durch elementare Funktionen dargestellt werden.

Lösung zu Aufgabe 10.12

Für alle $k \in [0,1]$ und alle $a \in [0,1]$ gilt:

$$\int_0^a \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\arcsin(a)} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2(z)}}{\sqrt{1-\sin^2(z)}}\cos(z)\,dz \qquad \text{Substitution} t = \sin(z)$$

$$= \int_0^{\arcsin(a)} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2(z)}}{\sqrt{\cos^2(z)}} \cos(z)\,dz$$

$$= \int_0^{\arcsin(a)} \sqrt{1-k^2\sin^2(z)}\,dz \qquad \text{da } \cos(z) > 0 \text{ in } [0, \arcsin(a)]$$

Wegen der Stetigkeit der arcsin-Funktion gilt

$$\lim_{a\to 1} \int_0^{\arcsin(a)} \sqrt{1-k^2\sin^2(z)}\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2(z)}\,dz$$

Die Funktion $z \mapsto \sqrt{1-k^2\sin^2(z)}$ ist in $[0, \frac{\pi}{2}]$ stetig, daher existiert das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2(z)}\,dz$$

und daher auch für alle $k \in [0,1]$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

und es gilt

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2(z)}\,dz.$$

Aufgabe 10.13

Gegeben sei das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v(x,y,z) := \begin{pmatrix} xy, & x^2, & x-z \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \langle v, dx\rangle$ vom Nullpunkt zum Punkt $(1,2,4)$, wobei

a) γ_1 die gerade Verbindung beider Punkte ist,

b) γ_2 die Kurve gegeben durch die folgende Parametrisierung ist: $x = t^2, y = 2t^3, z = 4t$.

Lösung zu Aufgabe 10.13

a) Es ist $\gamma_1\colon [0,1],\ \gamma_1(t) = (t, \quad 2t \quad 4t)$. Damit folgt $\gamma_1'(t) = (1, \quad 2, \quad 4)$, so dass sich für das Kurvenintegral ergibt:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \langle v, dx\rangle &= \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} t\cdot 2t \\ t^2 \\ t-4t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle\,dt \\
&= \int_0^1 \left(2t^2 + 2t^2 - 12t\right) dt = \int_0^1 \left(4t^2 - 12t\right) dt \\
&= \frac{4}{3}t^3 - \frac{12}{2}t^2 \Big|_0^1 \\
&= -\frac{14}{3}
\end{aligned}$$

b) Mit der Parametrisierung $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t^2, & 2t^3, & 4t \end{pmatrix}$ ergibt sich $\gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 2t, & 6t^2, & 4 \end{pmatrix}$, somit erhalten wir für das Kurvenintegral

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \langle v, dx \rangle &= \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} t^2 \cdot 2t^3 \\ t^4 \\ t^2 - 4t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t \\ 6t^2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle \, dt \\
&= \int_0^1 \left(4t^6 + 6t^6 + 4t^2 - 16t \right) dt = \int_0^1 \left(10t^6 + 4t^2 - 16t \right) dt \\
&= \frac{10}{7} t^7 + \frac{4}{3} t^3 - \frac{16}{2} t^2 \Big|_0^1 \\
&= -\frac{110}{21}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.14

a) Untersuchen Sie, ob k_1, k_2 konservative Kraftfelder sind:

1. $k_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, k_1(x, y) := \begin{pmatrix} xy^2, & xy \end{pmatrix}$
2. $k_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, k_2(x, y) := (ye^x, \quad e^x - \cos(y))$

b) Berechnen Sie eine Potentialfunktion für k_i, $i \in \{1, 2\}$ an, sofern k_i ein konservatives Kraftfeld ist.

Lösung zu Aufgabe 10.14

a) Wir überprüfen die Integrabilitätsbedingungen für die beiden Vektorfelder:

1. Es ist $\frac{\partial k_1^1}{\partial y} = 2xy$ und $\frac{\partial k_1^2}{\partial x} = y$, es ist also $\frac{\partial k_1^2}{\partial x} \neq \frac{\partial k_1^1}{\partial y}$. k_1 ist daher kein konservatives Vektorfeld.
2. Es ist $\frac{\partial k_2^1}{\partial y} = e^x = \frac{\partial k_2^2}{\partial x}$, k_2 ist also ein konservatives Kraftfeld.

b) Eine Potentialfunktion F für k_2 ist $F(x, y) = ye^x - \sin(y)$, denn es gilt $\operatorname{grad} F = (ye^x, \quad e^x - \cos(y))$.