Übungsblatt 13

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Zur Bearbeitung in der Übung am 29.01.2018

Vorlesung: Dr. Daniel Habeck
Übungen: Dr. David Willems

Download von Übungsblättern, Zusatzmaterial etc.: `http://uni-ko-ld.de/k7`

Aufgabe 13.1

Integrieren Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2y + z$ über die Menge Z für

$$Z := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4, 0 < z < 2, y > 0\right\}.$$

Aufgabe 13.2

Berechnen Sie das Integral

$$\int_K xyz \, d(x, y, z),$$

wobei K die Einheitskugel sei.

Aufgabe 13.3

Zu bestimmen ist das Bereichsintegral

$$\int_D \arctan\left(\frac{x-y}{x+y}\right) d(x, y), \quad \text{wobei } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

a) Führen Sie die Koordinatentransformation

$$x = s(\cos(t) + \sin(t)) \qquad y = s(\cos(t) - \sin(t))$$

auf geeigneten Parameterintervallen für s und t im gegebenen Integral durch und geben Sie das Bereichsintegral in den neuen Koordinaten an.

b) Berechnen Sie das Integral.

Hausübungen

Aufgabe 13.4

Das für viele Anwendungen wichtige Fehlerintegral

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx$$

kann nicht durch eine analytisch berechnete Stammfunktion bestimmt werden. Um dennoch seinen Wert exakt zu bestimmen, kann folgender „Umweg“ über Bereichsintegrale genommen werden:

a) Betrachten Sie, zunächst in kartesischen Koordinaten, anstatt $\mathcal{E}$ das Quadrat des Fehlerintegrals $\mathcal{E}^2$.

b) Transformieren Sie den gewonnenen Ausdruck mittels geeigneter Koordinatentransformation und integrieren Sie diesen Ausdruck.

Aufgabe 13.5

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der durch die beiden Kurven

$$y^2 + x - 1 = 0 \quad \text{und } y^2 - x - 1 = 0$$

eingeschlossenen Fläche.

Aufgabe 13.6

Die Transformation in *Kugelkoordinaten* ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} = \psi(r, \vartheta, \varphi)$$

mit $r \geq 0, \vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi[$.

Zeigen Sie (unter Berücksichtigung von $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$), dass $\det J_\psi(r, \vartheta, \varphi) = r^2 \sin\vartheta$.