Universität Koblenz–Landau

Fachbereich Informatik

Quaternionen

Markus Bartz

Matrikelnummer 9620060

Seminar Computergraphik

betreut von Prof. Dr.-Ing. H. Giesen

Wintersemester 2000/2001

Vortrag vom 12. April 2001

Zusammenfassung

Dieser Text entstand im Rahmen des Seminars Computergrafik im Wintersemester 2000/2001 an der Universität Koblenz-Landau, Abt. Koblenz. Er befaßt sich mit Rotationen im dreidimensionalen Raum, welche mit Hilfe von Quaternionen berechnet werden können. Er soll die benötigten mathematischen Grundlagen und die Vor- bzw. Nachteile gegenüber dem Eulerschen Verfahren darstellen. Im zweiten Kapitel soll dann eine kurze Einführung in die Welt der Fraktale gegeben werden, und eine völlig andere Anwendung von Quaternionen gezeigt werden.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Rotationen mit Quaternionen

Quaternionen wurden am 16. Oktober 1843 von dem irischen Mathematiker Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865) erfunden. Hamilton war damals auf der Suche nach einer dreidimensionalen Erweiterung der komplexen Zahlen, jedoch gelang es ihm nicht diese zu multiplizieren. Erst als er die vierte Dimension einführte, war die Multiplikation definierbar. Verwendung fanden Hamiltons Quaternionen zunächst jedoch nicht, da es recht mühsam und umständlich war mit ihnen zu rechnen. Erst die Auffassung von Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903), daß Quaternionen aus einem „skalaren“ und einem “vektoriellen“ Teil der Form $ai + bj + ck$ bestehen, führte zu einer erheblichen Vereinfachung. Viele Probleme ließen sich auch damit behandeln, daß man nur den vektoriellen Teil betrachtete, was unserer heutigen Auffassung der dreidimensionalen Vektoren entspricht. Das 1881 von Gibbs erschienene Buch „Vector Analysis“ gilt als die eigentliche Geburtsstunde des Vektorbegriffs.

1.1 Definitionen und Schreibweise

1.1.1 Schreibweise

Für Quaternionen sind heute folgende zwei Schreibweisen üblich:

$$q = s + ix + jy + kz$$

oder:

$$q = \left[s, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]$$

Die zweite Schreibweise ist die, die Gibbs in seinem Buch verwandte. Es ist jedoch völlig gleichgültig, für welche der Schreibweisen man sich entscheidet. In der Literatur sind beide zu finden.
Beim Rechnen mit Quaternionen muß man beachten, daß es spezielle Rechenregeln

für die Imaginärteile gibt. Ähnlich wie bei den komplexen Zahlen ergeben die Quadrate der Imaginärteile minus eins: $i^2 = j^2 = z^2 = -1$. Da aber die Multiplation nicht kommutativ ist gelten desweiteren für folgende Regeln: $i \cdot j = k \quad j \cdot k = i \quad k \cdot i = j$ wobei $j \cdot i = -k$.

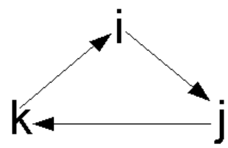

Abbildung 1.1: Rechenregel für die Imaginärteilmultiplikation

Das Vorzeichen der Imaginärteilmultiplikation läßt sich anhand des oben abgebildeten Dreiecks ersehen. Solange man sich in Pfeilrichtung bewegt, ist das Ergebnis positiv - in entgegengesetzter Richtung ist es negativ.

1.1.2 Addition

Definition

Die Addition zweier Quaternionen q und q' ist wie folgt definiert:

$$q + q' = \left[s + s', v + v'\right]$$

Beweis

$$\begin{aligned} q + q' &= [s, v] + \left[s', v'\right] \\ &= (s + ix + jy + kz) + (s' + ix' + jy' + kz') \\ &= s + s' + i\left(x + x'\right) + j\left(y + y'\right) + k\left(z + z'\right) \\ &= \left[s + s', v + v'\right] \end{aligned}$$

1.1.3 Multiplikation

Definition

Die Multiplikation zweier Quaternionen q und q' ist definiert als:

$$q \cdot q' = \left[s \cdot s' - v \cdot v', v \times v' + s \cdot v' + s' \cdot v\right]$$

Beweis

$$\begin{aligned} q \cdot q' &= [s, v] \cdot [s', v'] \\ &= (s + ix + jy + kz) \cdot (s' + ix' + jy' + kz') \\ &= s \cdot s' - (xx' + yy' + zz') + i(sx' + s'x + yz' - zy') \\ &\quad + j(sy' + s'y + zx' - xz') + k(sz' + s'z + xy' - yx') \\ &= [ss' - vv', v \times v' + sv' + s'v] \end{aligned}$$

1.1.4 Konjugierte

Das Konjugierte eines Quaternions q ist wie folgt definiert:

$$q^* = [s, -v]$$

1.1.5 Betrag (Länge)

Der Betrag, bzw. die Länge eines Quaternions q ist:

$$\|q\| = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

Dabei heißt q ein *Einheitsquaternion*, wenn gilt: $\|q\| = 1$

1.1.6 Inverse

Das Inverse Quaternion von q ist:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$$

Aus den letzten beiden Definitionen ist ersichtlich, daß für Einheitsquaternionen das Inverse und das Konjugierte identisch sind.

1.2 Rotationen mit Quaternionen

1.2.1 Polarform

Die Polarform für Quaternionen ist insbesondere für die Berechnung von Drehungen im dreidimensionalen Raum, auf die später eingegangen werden soll, von Bedeutung. Sie ist definiert als:

$$q = \|q\| \cdot (\cos(\Theta) + i \cdot \sin(\Theta) + j \cdot \sin(\Theta) + k \cdot \sin(\Theta))$$

Handelt es sich bei q um ein Einheitsquaternion, existiert noch folgende vereinfachte Schreibweise:

$$q = [\cos(\Theta), n \cdot \sin(\Theta)]$$

Wobei n ein Vektor der Länge 1 ist.

1.2.2 Rotation

Die eigentliche Rotation mittels Quaternionenmultiplikation genügt der Gleichung:

$$q \cdot p \cdot q^{-1} \quad \text{bzw.} \quad q \cdot p \cdot q^{*} \quad \text{falls } q \text{ Einheitsquaternion ist}$$

1.2.3 Beispiel

Als Beispiel soll der Punkt $P\ (0,2,6)$ 60° rechtsherum um die z-Achse gedreht werden. Aus den o. g. Formeln ergibt sich für die Rotationsachse: $(0,0,-1)$ bzw. folgt in Polarform:

$$q = \left[\cos(30^\circ), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = [\cos(30^\circ) - 0,5 \cdot k]$$

Für den Punkt P ergibt sich die folgende Darstellung:

$$p = \left[0, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right] = 0 + 0 \cdot i + 2 \cdot j + 6 \cdot k$$

Berechnung

$$\begin{aligned}
q \cdot p \cdot q^{*} &= (\cos(30^\circ) - 0,5k) \cdot (2j + 6k) \cdot (\cos(30^\circ) + 0,5k) \\
&= (2j \cdot \cos(30^\circ) + 6k \cdot \cos(30^\circ) - 0,5k \cdot 2j - 0,5k \cdot 6k) \cdot (\cos(30^\circ) + 0,5k) \\
&= (2j \cdot \cos(30^\circ) + 6k \cdot \cos(30^\circ) + i + 3) \cdot (cos(30^\circ) + 0,5k) \\
&= 2j \cdot \cos^2(30^\circ) + 6k \cdot \cos^2(30^\circ) + i \cdot (30^\circ) + 3 \cdot \cos(30^\circ) + 2j \cdot 0,5k \cdot \cos(30^\circ) \\
&\quad + 3k^2 \cdot \cos(30^\circ) + i \cdot 0,5k + 1,5k \\
&= 2j \cdot \cos^2(30^\circ) + 6k \cdot \cos^2(30^\circ) + i \cdot \cos(30^\circ) + 3 \cdot \cos(30^\circ) \\
&\quad + i \cdot \cos(30^\circ) - 0,5j + 1,5k \\
&= i \cdot (2cos(30^\circ)) + j \cdot \left(2cos^2(30^\circ) - 0,5\right) + k \cdot \left(6\cos^2(30^\circ) + 1,5\right) \\
&= i \cdot 1,73 + j \cdot 1 + k \cdot 6
\end{aligned}$$

Wenn man das Ergebnis nun wieder in die übliche Vektorschreibweise überführt erhält man:

$$P' = \begin{pmatrix} 1,73 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Als Kontrollrechnung empfiehlt es sich als Erstes, zu prüfen, ob die Länge des Vektors sich durch die Rotation geändert hat oder nicht. Die Länge des Ausgangsvektors war: $\|q\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$. Im Vergleich dazu die Länge des neuen Vektors: $\|q'\| = \sqrt{1,73^2 + 1^2 + 6^2}$ ergibt ebenfalls $\sqrt{40}$.

1.2.4 Konkatention

Zwei Rotationen R_1 und R_2, die durch q_1 und q_2 repräsentiert werden, können wie folgt konkateniert werden. $R = R_1 R_2$ und die Repräsentation ist $q = q_1 q_2$.

Beweis

$$\begin{aligned} q_2 \cdot (q_1 \cdot p \cdot q_1^*) \cdot q_2^* &= (q_2 \cdot q_1) \cdot p \cdot (q_1^* \cdot q_2^*) \\ &= (q_2 \cdot q_1) \cdot (q_2 \cdot q_1)^* \\ &= q \cdot p \cdot q^* \text{ mit } q = q_2 \cdot q_1 \end{aligned}$$

1.2.5 Potenz eines Quaternions

Die Potenz eines Quaternions q ist q^x und bedeutet geometrisch eine x-mal soweite Drehung wie q. Der Beweis hierzu kann in [DAM 98] nachgelesen werden.

1.2.6 Die Rotationsmatrix

Für ein gegebenes Quaternion $q = [s, (x, y, z)]$ läßt sich folgende Rotationsmatrix herleiten:

$$\begin{pmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2(xy-sz) & 2(xz+sy) \\ 2(xy+sz) & 1-2(x^2+z^2) & 2(yz-sx) \\ 2(xz-sy) & 2(yz+sx) & 1-2(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

Man darf sich an dieser Stelle nicht täuschen lassen, und denken die Berechnung wäre besonders schnell, da keine trigonometrischen Funktionen vorhanden sind - diese kommen durch die in Polarform gegegeben Koordinatenwerte doch noch mit ins Spiel.

1.3 Vor- und Nachteile der Quaternionenrotation

Um im folgenden die Vor- und Nachteile der Quaternionendrehung im Hinblick auf die üblichen Verfahren zu diskutieren, soll nun kurz die Drehung mit Hilfe der Eulerschen Winkel betrachtet werden.
Um eine Drehung um eine beliebige Drehachse im dreidimensionalen Raum durchzuführen, wird bei diesem Verfahren die Drehung in drei „Achsendrehungen“ jeweils um die Koordinatenachsen zerlegt. Die daraus resultierenden Drehungen werden als *roll*, *pitch* und *yaw* bezeichnet. So einfach und intuitiv dieses Verfahren auch zu sein scheint, bringt es doch einige Probleme mit sich, die es für verschiedene Anwendungsfälle als eher ungeeignet erscheinen lassen.

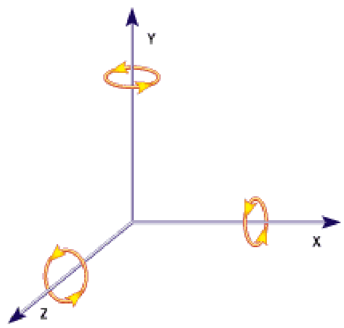

Abbildung 1.2: Rotation um die Koordinatenachsen

1.3.1 Nachteile des Eulerschen Verfahrens

- Am auffälligsten ist wahrscheinlich, daß es nicht immer einfach ist eine beliebige Drehung in drei Komponenten aufzuteilen, die den geforderten Drehungen um die Koordinatenachsen entsprechen. Als Beispiel dafür läßt sich die Drehung um den Punkt $(1, 1, 1)$ anführen, da es nicht intuitiv möglich ist, die entsprechenden drei Winkel anzugeben.

- Die Reihenfolge in der man die einzelnen Drehungen ausführt ist nicht beliebig. Als Beispiel hierfür kann man eine Drehung um 90° um die x-Achse, 45° um die y-Achse und 0° um die z-Achse angeben. Denn je nachdem welche Drehung man zuerst ausführt, erhält man ein anderes Ergebnis. In Abb. 1.3 wurde die

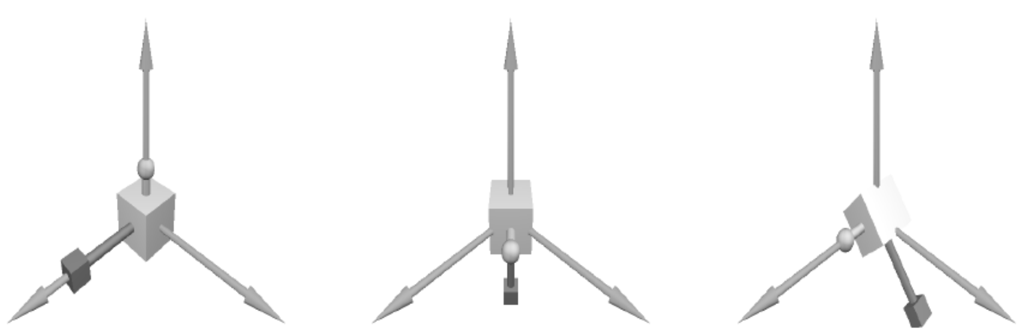

Abbildung 1.3: Beispiel Drehung mit unterschiedlichen Ergebnissen

linke Figur zweimal um o. g. Winkel gedreht. Die mittlere und die rechte Figur stellen jeweils die Ergebnisse der Drehung dar.

- Es kann zum sogenannten *Gimbal Lock* kommen. Dies bezeichnet mathematisch gesehen den Verlust eines Freiheitsgrades und kann mit Hilfe eines *Gyroskops* verdeutlicht werden. Prinzipiell besteht ein Gyroskop aus drei konzentrischen Ringen von denen der innerste die x-Achse, der mittlere die y-Achse und der äußerste die z-Achse repräsentiert. Dreht man nun 45° um die x-Achse und 90° um die y-Achse entsteht ein Gimbal Lock - eben eine Situation, in der x-Achse und z-Achse in einer Linie zueinander stehen. Vgl. Abb. 1.4 - Abb. 1.6.

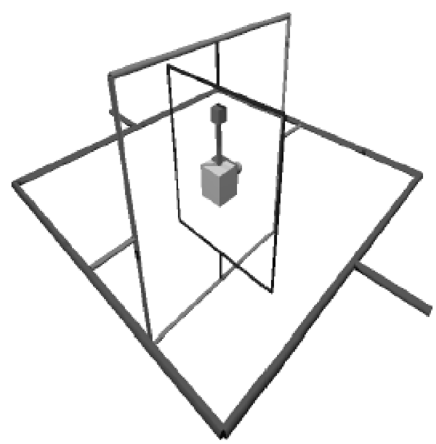

Abbildung 1.4: Ausgangsituation

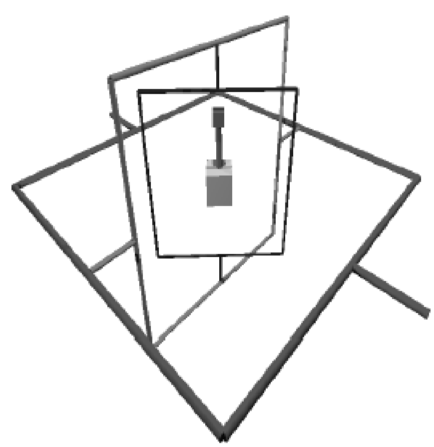

Abbildung 1.5: Drehung der x-Achse um 45°

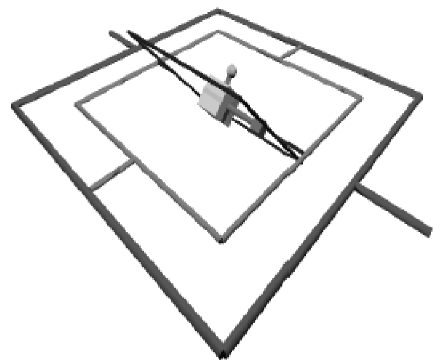

Abbildung 1.6: Drehung der y-Achse um 90° und Gimbal Lock

- Es kann keine lineare Matrizeninterpolation verwendet werden um zwischen zwei Orientierungen eines Vektors zu interpolieren. Weitere Erläuterungen hierzu finden sich in [DAM 98].

- Man kann von einer gegebenen Matrix nicht eindeutig auf die Basisrotation zurückschließen, da der Zusammenhang zwischen Rotation und Rotationsmatrix nicht injektiv ist.

- Die in der Rotationsmatrix enthaltene Information ist redundant. Es werden 9 Stellen benötigt um 4 Freiheitsgrade darzustellen. Darüber hinaus müssen noch ständig 6 Bedingungen überprüft werden: Jede Zeile muß einen Einheitsvektor repräsentieren und die Spalten müssen zueinander orthogonal sein.

1.3.2 Vorteile des Eulerschen Verfahrens

- Ein Vorteil ist, daß es sich bei der benötigten Mathematik um Standardlehrstoff handelt - der darüber hinaus auch in entsprechend vielen Büchern zur Mathematik und Computergrafik zu finden ist.

- Mit der Matrizendarstellung erhält man gleich die benötigte Darstellungsform um weitere Operationen wie z. B. Translationen, Skalierungen oder Projektionen zu berechnen.

1.3.3 Nachteile von Quaternionen

- Mit Quaternionen kann man nur Rotationen berechnen. Daraus folgt, daß man am besten Matrizen und Quaternionen verwendet, was dann allerdings wieder Umrechnungen erfordert, die wiederum Rechenzeit kosten.

- Quaternionenrechnung wird nicht standardmäßig in der Ausbildung vermittelt und wird in der Literatur nur selten berücksichtigt.[1]

1.3.4 Vorteile von Quaternionen

- Die Rotation erfolgt direkt um die gewünschte Drehachse. Es muß kein Umweg wie bei dem Eulerschen Verfahren genutzt werden.
- Da die Rotation eindeutig ist, kann man sich die Mühe sparen Konventionen über Reihenfolge der Drehungen aufzustellen.
- Das oben beschriebene Problem des Gimbal Locks existiert nicht.
- Es kann mit Verfahren wie SLERP und SQUAD zwischen zwei Orientierungen interpoliert werden. Dieses wird für Kamerafahrten oder auch „sanfte“ Bewegungsabläufe in Computerspielen benötigt. Für genauere Informationen hierzu siehe [DAM 98].
- Es müssen nicht 6 Bedingungen wie in der Eulerschen Geometrie ständig geprüft werden. Theoretisch kann jedes Quaternion ungleich Null für Rotationen genutzt werden - in der Praxis verwendet man aber normalerweise nur Einheitsquaternionen
- Die Konkatenation von Rotationen ist effizenter. Statt der bei 3×3-Matrizen notwendigen 27 Multiplikationen und 18 Additionen läßt sich der Rechenaufwand bei Quaternionen mit dem entsprechenden Algorithmus auf 8 Multiplikationen und 4 Divisionen beschränken. Weitere Informationen hierzu sind in [BOB 98] zu finden.

[1] Dafür existieren im World Wide Web entsprechend viele Seiten, die sich mit dem Thema beschäftigen

Kapitel 2

Fraktale und Quaternionen

Im folgenden Kapitel soll auf die Berechnung von Fraktalen und den Zusammenhang mit Quaternionen eingegangen werden. Es soll dabei aber nur auf eine besondere Form von Fraktalen eingegangen werden - nämlich dreidimensionale Fraktale. Von ihrer prinzipiellen Entstehung unterscheiden sich dreidimensionale Fraktale nicht von den zweidimensionalen - man verwendet für beide eine Formel, über welche dann iteriert wird, aber dazu im folgenden mehr.

2.1 Grundlagen

2.1.1 Definition des Begriffs Fraktal

Als Fraktal wird ein Objekt bezeichnet, welches die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit aufweist. Selbstähnlichkeit bedeutet in diesem Zusammenhang, daß das Objekt aus unendlich vielen Objekten seiner selbst besteht. Die bekanntesten Beispiele sind wohl die Kochsche Schneeflockenkurve und die Mandelbrotmenge (Apfelmännchen).

2.1.2 Berechnung von Fraktalen

Wie schon in der Einleitung erwähnt, entsteht ein Fraktal durch Iteration über eine Zuordnungsvorschrift. Eine solche komplexe Zuordnungsvorschrift ist z. B. $x \rightarrow x^2 + c$. Mit Hilfe dieser Vorschrift läßt sich die Mandelbrotmenge berechnen, wobei das Ergebnis stark von einer geeigneten Wahl der Konstanten c abhängt. Der Eingabeparameter x sind die Koordinaten des jeweiligen Bildpunktes. Weitergehende Informationen und detaillierte Anleitungen zur Erzeugung von Fraktalen finden sich in [PEIT 92]. Die bei der Iteration entstehende Folge kann nun drei verschiedene Verhaltensweisen zeigen:

- Die Folge konvergiert
- Die Folge pendelt periodisch zwischen verschiedenen Werten hin und her

- Die Folge strebt gegen unendlich

Abhängig vom Verhalten der Folge wird der entsprechende Bildpunkt eingefärbt. Das eigentliche Problem besteht darin, die obigen drei Fälle bei der Berechnung zu unterscheiden. Ein Computer kann schließlich nicht wie ein Mensch das Folgeverhalten untersuchen - man kann ihn nur iterieren lassen, wofür man aber auch keine „unendliche" Zeit zur Verfügung hat. Aus diesem Grund betrachtet man das Iterationsergebnis nach einer vorgegebenen Anzahl von Iterationsschritten und vergleicht es mit einem Vorgabewert. Ist der Folgenwert größer als der Vorgabewert, so nimmt man ein Streben nach Unendlich an. Ist der Folgewert kleiner als die Vorgabe, so wird entsprechend des Folgewertes ein Wert aus der Farbskala dem Bildpunkt zugeordnet.

2.1.3 Zusammenhang Quaternionen und Fraktale

Man kann sich nun natürlich die Frage stellen, was Quaternionen mit Fraktalen zu tun haben? Wo Quaternionen doch vierdimensionale Zahlen sind und der Mensch maximal drei Dimensionen sehen kann. Setzt man bei einem Quaternion nun eine Komponente als konstant, so bleiben einem noch weitere drei Komponenten als Parameter - eben die drei Dimensionen.

2.2 Quat - 3D Fraktalgenerator

Dirk Meyer von Universität Stuttgart hat mit *Quat* einen Generator für dreidimensionale Fraktale programmiert, der unter GNU GPL Lizenz steht und frei verügbar ist. Mit diesem Programm sind auch die folgenden Fraktale berechnet worden. Das Programm, eine Benutzungsanleitung, sowie eine Bildgallerie findet man unter:

http://www.physcip.uni-stuttgart.de/phy11733/quat.html

Die folgenden beiden Fraktale wurden mit Quat berechnet, wobei sie sich nur in der Wahl der Iterationsformel unterscheiden. Das erste wurde mit der sog. Formel *Classical Julia*

$$x_{n+1} = x_n^2 - c$$

berechnet, während für das zweite Fraktal die Formel *Lambda-Julia*

$$x_{n+1} = c \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

verwendet wurde.

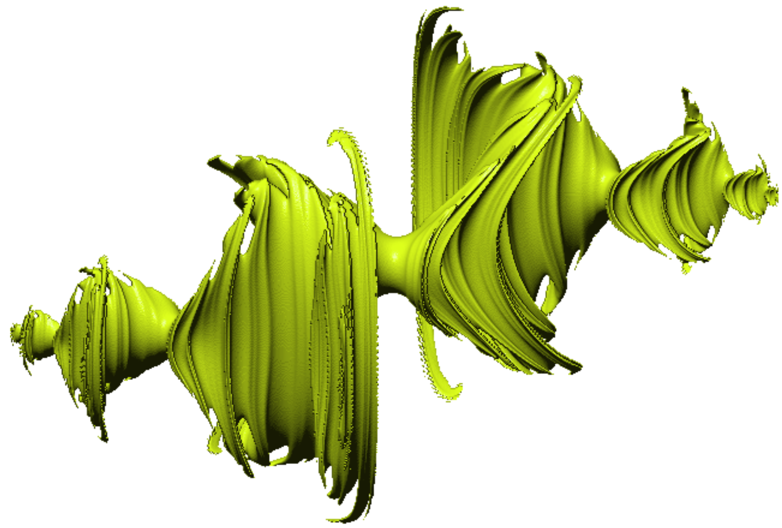

Abbildung 2.1: Fraktal mit Classical Julia

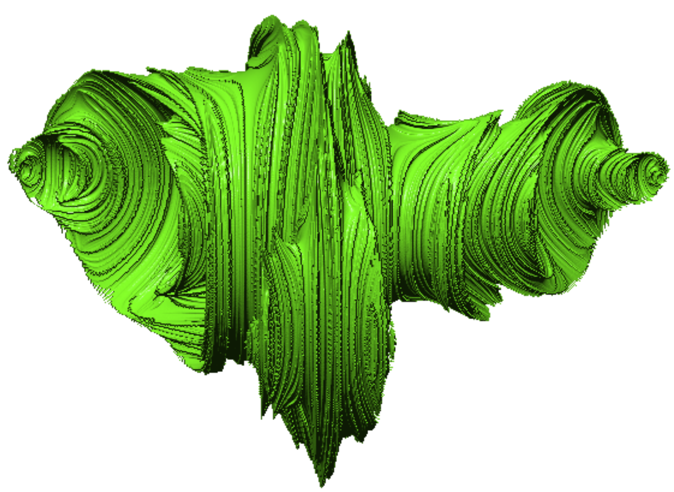

Abbildung 2.2: Fraktal mit Lambda Julia

Literaturverzeichnis

[DAM 98] Erik B. Dam, Martin Koch, Martin Lillholm: *Quaternions, Interpolation and Animation*, 17. July 1998, University of Copenhagen

[BOB 98] Nick Bobick: *Rotating Objects Using Quaternions*, Game Developer Februar 1998

[FOL 94] James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner, John F. Hughes, Richard L. Philips: *Grundlagen der Computergraphik - Einfhrung, Konzepte, Methoden*, Addison Wesley 1994

[PEIT 92] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe: *Bausteine des Chaos Fraktale*, Klett-Cotta/Springer Verlag 1992